LEZIONE 1 - GEOMETRIA e ALGEBRA 07/03/23

Cominciamo questo corso facendo alcuni richiami di logica e di teoria degli insiemi.

I) RICHIAMI DI LOGICA

In matematica una proposizione è una frase a cui è sempre possibile collegare uno dei due valori di verità:

- V - VERO
- F - FALSO

Esempi:

1) La proposizione P: "$2+2=4$" è vera
2) La proposizione Q: "Napoli è nel Lazio" è FALSA poiché Napoli si trova nella regione Campania.
3) La frase:

$P(n)$: "n è un quadrato perfetto"

diventa una proposizione quando si specifica il valore di n, altrimenti non se ne può determinare il valore di verità

$P(4)$ è VERA perché $4 = 2^2$

$P(5)$ è FALSA perché per ogni intero x, $x^2 \neq 5$.

Possiamo comporre due o più proposizioni utilizzando i connettivi logici:

- NEGAZIONE: $\neg$ (si legge "non")
- CONGIUNZIONE: $\wedge$ (si legge "e")
- DISGIUNZIONE INCLUSIVA: $\vee$ (si legge "o")
- IMPLICAZIONE: $\Rightarrow$ (si legge "se ... allora")
- DOPPIA IMPLICAZIONE: $\Leftrightarrow$ (si legge "se e solo se")

Il valore di verità delle proposizioni risultanti è definito dalle TAVOLE DI VERITÀ

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

- $\neg P$ e P hanno sempre valori di verità distinti.
- $P \wedge Q$ è vera se e solo se P e Q sono entrambe vere.
- $P \vee Q$ è vera quando almeno una tra P e Q è vera.
- $P \Rightarrow Q$ è falsa se e solo se P è falsa e Q è vera.
- $P \Leftrightarrow Q$ è vera se e solo se P e Q hanno lo stesso valore di verità

<u>Def</u>: Due proposizioni si dicono equivalenti se hanno gli stessi valori di verità.

In tal caso scriviamo $P \Leftrightarrow Q$

<u>Esempio</u>: Mostriamo che le proposizioni

$$P \Rightarrow Q \quad \text{e} \quad \neg Q \Rightarrow \neg P$$

sono equivalenti usando una tavola di verità:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

Poichè $P \Rightarrow Q$ e $\neg Q \Rightarrow \neg P$ hanno gli stessi valori di verità, possiamo scrivere

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

Proprio su questa equivalenza di proposizioni si basa la dimostrazione per contrapposizione (ne vedremo un esempio più avanti).

Attenzione: $P \Rightarrow Q$ non è equivalente a $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

Infatti quando P è falsa e Q è vera abbiamo:

- $P \Rightarrow Q$ è vera
- $\neg P \Rightarrow \neg Q$ è falsa.

I QUANTIFICATORI danno un'informazione su quanto è grande l'estensione in cui una proposizione è vera.

Sono di due tipi:

- universale: $\forall$ (si legge "per ogni")
- esistenziale: $\exists$ (si legge "esiste")
  $\exists!$ (si legge "esiste ed è unico")

ESEMPI

1) • La proposizione

"$\forall\ x$ numero reale, $x^2 \geq 1$"

è FALSA. Infatti $x = \frac{1}{2}$ è un numero reale tale che $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1$

• La proposizione

"$\exists\ x$ numero reale : $x^2 \geq 1$"

è VERA perchè $x=2$ è un numero reale che verifica $2^2 \geq 1$.

2) Consideriamo:

$P(x)$ = "x è uno studente che ha superato l'esame di geometria e algebra"

$Q(x)$ = "x è uno studente che ha preso 30 all'esame di geometria e algebra"

- La proposizione
$$\forall x, \ Q(x) \Rightarrow P(x)$$
è VERA. Infatti prendere 30 all'esame implica superare l'esame.

- La proposizione
$$\forall x, \ P(x) \Rightarrow Q(x)$$
è FALSA. Un controesempio è dato da uno studente x_0 che ha superato l'esame con un voto tra 18 e 29. In tal caso $P(x_0)$ è vera e $Q(x_0)$ è falsa.

3) Consideriamo:

$P(n)$ = "n è un intero dispari"

$Q(n)$ = "n^2 è un intero dispari"

- La proposizione
"$\forall$ n numero intero, $P(n) \Rightarrow Q(n)$"
è VERA. Per convincercene, dobbiamo dimostrare l'enunciato.

Dimostrazione (esempio di dimostrazione diretta)

Se n è dispari allora esiste un intero k tale che
$$n = 2k+1.$$

Quindi
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1 = 2k'+1$$
dove $k' = 2k^2+2k$ è un intero. Concludiamo che n^2 è dispari.

$\square$

- La proposizione

"$\forall$ n numero intero, $Q(n) \Rightarrow P(n)$"

è VERA. In questo caso non è possibile fornire una dimostrazione diretta, ma procediamo per contrapposizione, ovvero dimostriamo che:

"$\forall$ n numero intero, $\neg P(n) \Longrightarrow \neg Q(n)$"

ossia

"$\forall$ n numero intero, n pari $\Rightarrow$ n^2 pari".

Dimostrazione

Se n è un numero pari, allora esiste un intero k tale che

$$n = 2k.$$

Quindi

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k',$$

dove $k' = 2k^2$ è un intero. Ne segue che n^2 è pari.

$\square$

VOCABOLARIO MATEMATICO

- Un teorema, un lemma, un corollario non sono altro che proposizioni vere, per le quali si può scrivere una dimostrazione.

- Una congettura è una proposizione che si presume essere vera, ma che non è stata dimostrata.

Esempio

L'Ultimo teorema di Fermat:

"Non esistono soluzioni intere positive (>0) dell'equazione $a^n + b^n = c^n$, per $n > 2$",

enunciato da Fermat nel 1637, è stato una congettura per più di 300 anni, prima che Andrew Wiles la dimostrasse nel 1994.

II) RICHIAMI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Un insieme è una collezione di oggetti detti elementi dell'insieme.

Per convenzione, gli insiemi vengono denotati con le lettere maiuscole, mentre gli elementi con le lettere minuscole.

Come descrivere un insieme

1) Per elencazione (se ho un insieme finito, ossia con un numero finito di elementi)

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

Utilizziamo il simbolo $\in$ per dire che un elemento appartiene all'insieme e il simbolo $\notin$ per dire che un elemento non appartiene all'insieme:

esempio: $11 \in A$: 11 appartiene ad A.

$17 \notin A$: 17 non appartiene ad A.

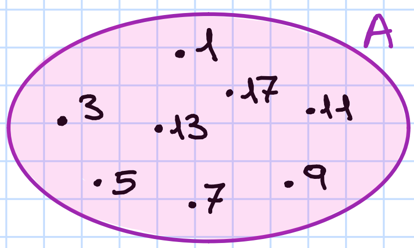
2) Per proprietà caratteristica

$A = \{n : n \text{ è dispari}, 1 \leq n \leq 15\}$

tali che

3) Graficamente

Con un diagramma di Eulero-Venn.



Def: Sia A un insieme finito.
La CARDINALITÀ (o ORDINE) di A è il numero di elementi di A e si denota $|A|$.

Nel nostro esempio $|A| = 8$.

Def.: L' INSIEME VUOTO è l'insieme che non possiede nessun elemento.
Si denota $\emptyset$ o $\{\}$.

I principali INSIEMI NUMERICI

- L'insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- L'insieme dei numeri interi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- L'insieme dei numeri razionali: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$
- L'insieme dei numeri reali: $\mathbb{R}$
- L'insieme dei numeri complessi: $\mathbb{C}$

Inclusione di insiemi

Def.: Diciamo che un insieme A è contenuto in un insieme B, e scriviamo $A \subseteq B$, se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B:

$$A \subseteq B \iff (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Se $A \subseteq B$ diciamo che A è un sottoinsieme di B.
Se A non è contenuto in B scriviamo $A \nsubseteq B$.

<u>Esempio</u>: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Le inclusioni inverse sono false. Ad esempio

$$\mathbb{Z} \nsubseteq \mathbb{N} \quad \text{poiché} \quad -1 \in \mathbb{Z} \ \text{e} \ -1 \notin \mathbb{N}.$$

Def.: Due insiemi A e B sono uguali se tutti gli elementi di A sono elementi di B e viceversa:

$$A = B \iff A \subseteq B \ \text{e} \ B \subseteq A.$$

<u>Osservazione</u>: Per mostrare che due insiemi sono uguali si procede per doppia inclusione.

Operazioni tra insiemi

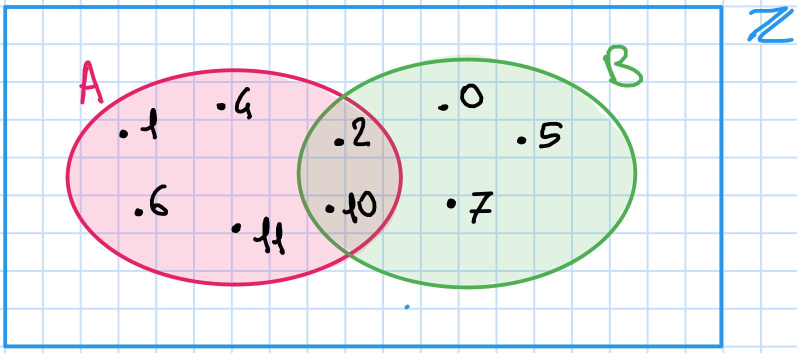
Siano A e B due insiemi. Nello stesso modo in cui è possibile creare nuove proposizioni con i connettivi logici, è possibile creare nuovi insiemi effettuando le opportune operazioni tra A e B.

Nel descrivere le operazioni lavoreremo con l'esempio seguente.

Esempio : $A = \{1, 2, 4, 6, 10, 11\}$

$B = \{0, 2, 5, 7, 10\}$

$A, B \subseteq U$, dove $U = \mathbb{Z}$.



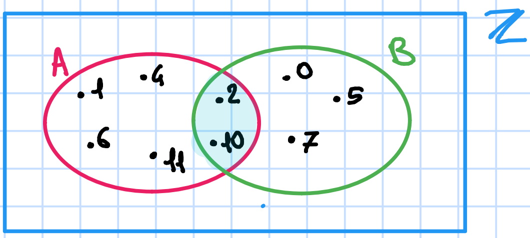
1) INTERSEZIONE (corrisponde al connettivo logico $\wedge$)

Def: L'intersezione di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \cap B := \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Se $A \cap B = \emptyset$ gli insiemi A e B si dicono disgiunti.

Nell'esempio $A \cap B = \{2, 10\}$



Proprietà :

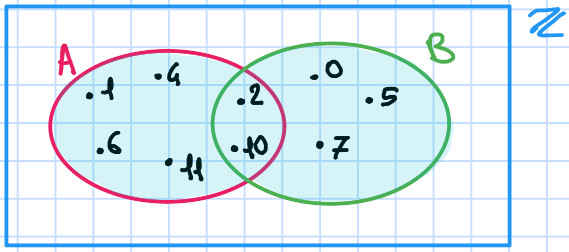
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$
- Se $A \subseteq B$ allora $A \cap B = A$.

2) UNIONE (corrisponde al connettivo logico $\vee$)

<u>Def</u>: L'unione di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \cup B := \{ x \in U : \; x \in A \;\; \underline{o} \;\; x \in B \}$$

Nell'esempio $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 14\}$



<u>Proprietà</u>:

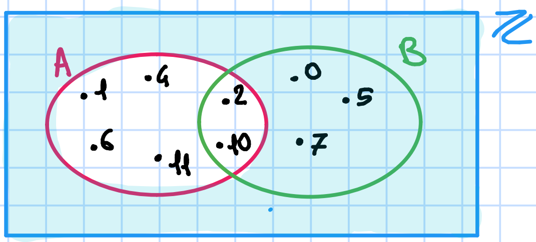
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
- Se $A \subseteq B$ allora $A \cup B = B$.
- $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$.

3) COMPLEMENTARE (corrisponde al connettivo logico $\neg$)

<u>Def</u>: Il complementare di un insieme A è l'insieme

$$A^c := \{ x \in U : \; x \notin A \}$$

Nell'esempio $A^c = \mathbb{Z} \setminus \{1, 2, 4, 6, 10, 14\}$



2) DIFFERENZA

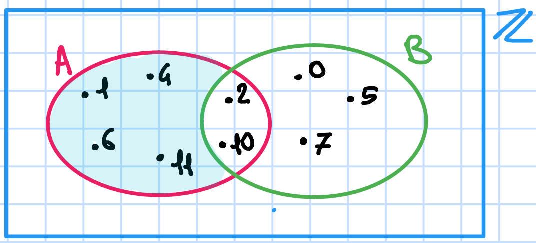
<u>Def</u>: La differenza "A meno B" è l'insieme

$$A \setminus B := \{ x \in A : \; x \notin B \}.$$

Nell'esempio:

$A \setminus B = \{1, 4, 6, 14\}$

$B \setminus A = \{0, 5, 7\}$



<u>Proprietà</u>:

- $A \setminus \emptyset = A$
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$.
- Se $A \subseteq B$, $A \setminus B = \emptyset$.

5) PRODOTTO CARTESIANO

Def: Il prodotto cartesiano di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

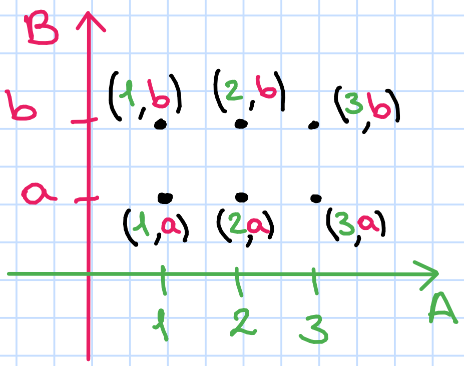
Ogni elemento di $A \times B$ è una coppia ordinata.

Esempio: Siano $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b\}$. Allora

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$$
$$B \times A = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$$

Si noti che $A \times B \neq B \times A$. Infatti $(1,a) \in A \times B$, ma $(1,a) \notin B \times A$.

Possiamo immaginare geometricamente $A \times B$ come i punti del piano cartesiano in cui l'ascissa è costituita dagli elementi di A e l'ordinata dagli elementi di B.



Proprietà

- Se A e B sono finiti, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (nell'esempio $|A \times B| = 6 = 3 \cdot 2 = |A||B|$)
- $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$.

È possibile considerare il prodotto cartesiano di n insiemi $A_1, \dots, A_n$. In tal caso gli elementi sono n-uple ordinate.

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i, \ \forall i \ 1, \dots, n\}$$

Esempio:
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ (geometricamente $\mathbb{R}^2$ è il piano cartesiano)
- $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots n\}$

$$(1,0,0), \ (1, \sqrt{2}, 3/2) \in \mathbb{R}^3.$$