LEZIONE 3 - GEOMETRIA e ALGEBRA

14/03/2023

Richiamiamo la definizione di segmento orientato dalla lezione precedente.

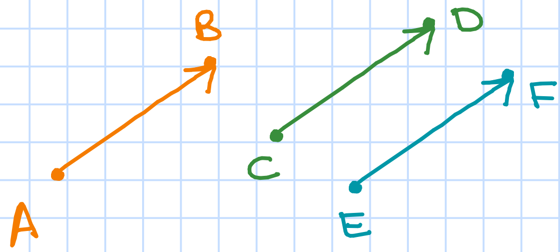
<u>Def</u>: Un segmento orientato del piano π è una coppia ordinata di punti $(A,B) \in \pi \times \pi$.

Denotiamo $\overrightarrow{AB} := (A,B)$

Sia $X := \pi \times \pi = \{ \overrightarrow{AB} : A, B \in \pi \}$ l'insieme dei segmenti orientati nel piano. Vogliamo definire una relazione di equivalenza su X.

Nel piano esistono infiniti segmenti orientati che hanno "stessa direzione, stesso verso, stessa intensità".
Diciamo che questi segmenti orientati sono "equipollenti" due a due

<u>esempio</u>:



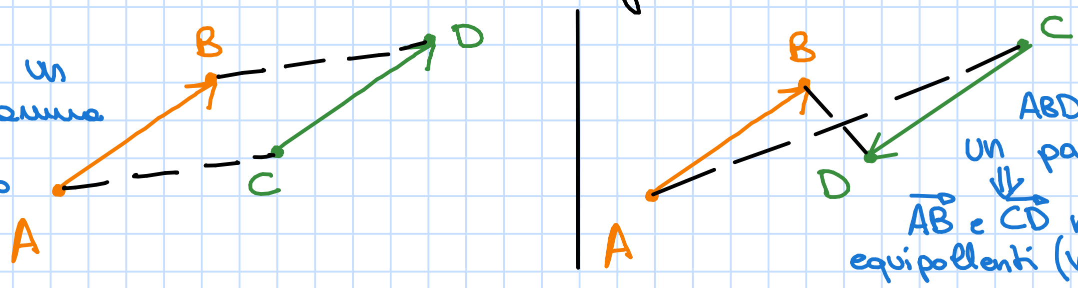
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{EF}$ sono "equipollenti" tra loro

L'unica cosa che cambia è il punto di applicazione

Più formalmente:

<u>Def</u>: Due segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si dicono equipollenti e scriviamo $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ se il quadrilatero avente vertici, ordinatamente, ABDC è un parallelogramma.

ABDC è un parallelogramma
$\Downarrow$
$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono equipollenti



ABDC non è un parallelog.
$\Downarrow$
$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ non sono equipollenti (verso diverso)

L'equipollenza è una relazione di equivalenza:

- $\sim$ è <u>riflessiva</u> (ogni segmento orientato è equipollente a se stesso)
Infatti $\forall\, \overrightarrow{AB} \in X$, ABBA è un parallelogramma (degenere) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$

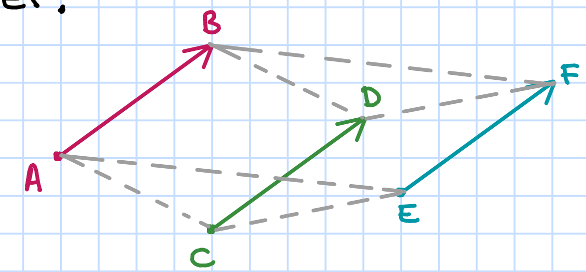
- $\sim$ è <u>simmetrica</u> (se $\vec{AB} \sim \vec{CD} \Rightarrow \vec{CD} \sim \vec{AB}$)

Infatti se $\vec{AB} \sim \vec{CD} \Rightarrow ABDC$ è un parallelogramma $\Rightarrow$
$\Rightarrow CDBA$ è un parallelogramma $\Rightarrow \vec{CD} \sim \vec{AB}$.

- $\sim$ è <u>transitiva</u>:

Infatti se $\vec{AB} \sim \vec{CD}$ e $\vec{CD} \sim \vec{EF} \Rightarrow ABDC$ e $CDFE$ sono parallelogrammi $\Rightarrow AB$ e EF sono paralleli e congruenti, in quanto sono entrambi paralleli e congruenti a $CD \Rightarrow ABFE$ è un parallelogramma $\Rightarrow \vec{AB} \sim \vec{EF}$.

Visualmente:

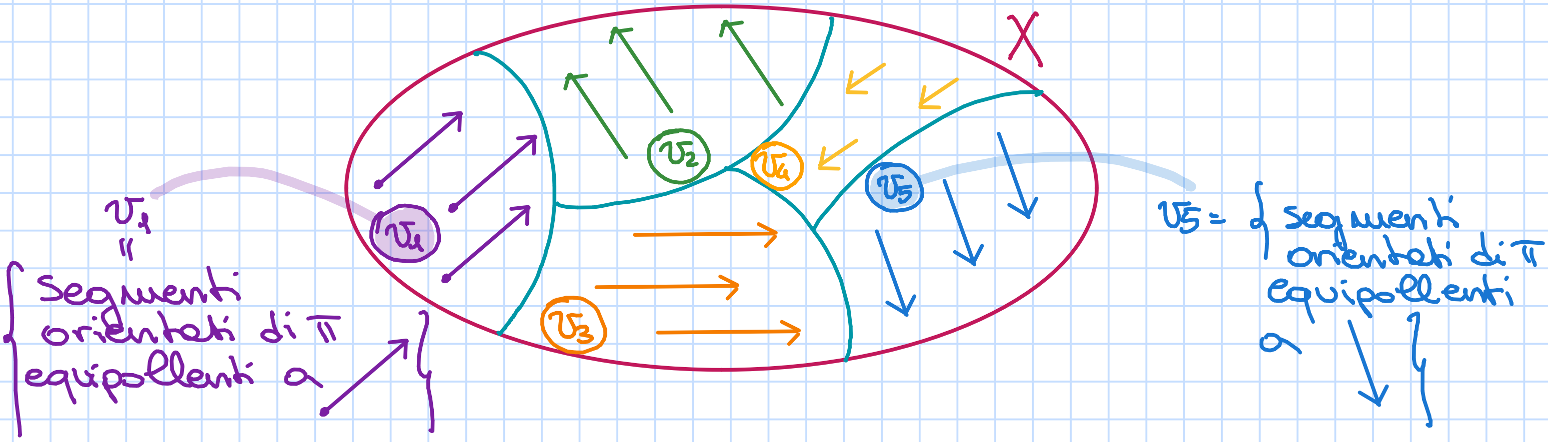


Per ogni segmento orientato $\vec{AB}$ posso considerare la corrispondente classe di equivalenza, detta classe di equipollenza.

$$[\vec{AB}]_{\sim} = \{ \vec{CD} \in X \ : \ \vec{AB} \sim \vec{CD} \}$$

↑ insieme dei segmenti orientati equipollenti ad $\vec{AB}$.

Possiamo quindi partizionare l'insieme dei segmenti orientati in classi di equipollenza disgiunte.

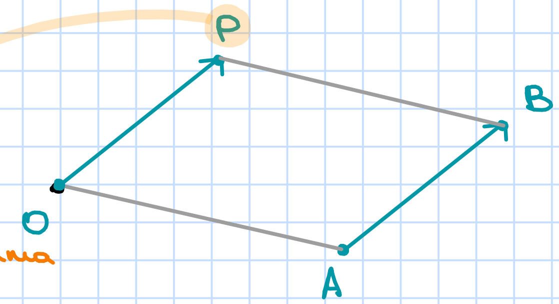


<u>Def</u>: Un vettore geometrico del piano π è una classe di equipollenza.

Sia ora $O \in \pi$ un punto fissato. Mostriamo che per ogni vettore geometrico (= classe di equipollenza) possiamo trovare un "rappresentante" con punto di applicazione O.

Basta mostrare che per ogni segmento orientato $\vec{AB}$ esiste un punto $P \in \pi$ tale che $\vec{OP}$ è equipollente ad $\vec{AB}$

Dato $\vec{AB}$ costruisco P tale che OPBA sia un parallelogramma



Per transitività $\vec{OP}$ è equipollente a tutti i segmenti orientati equipollenti ad $\vec{AB}$ e possiamo quindi sceglierlo come rappresentante della classe di equipollenza di $\vec{AB}$

Sia V l'insieme dei vettori geometrici del piano. Abbiamo quindi una funzione biunivoca:

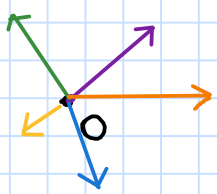
stesso punto di applicazione O

$$V = \{\text{vettori geometrici del piano}\} \longleftrightarrow \{\text{segmenti orientati } \vec{OP},\ P \in \pi\}$$

v (classe di equipollenza) $\longmapsto$ Rappresentante di v con punto di applicazione O

classe di equipollenza di $\vec{OP}$ $\longleftarrow\!\!\shortmid$ $\vec{OP}$

Questa biezione ci permette, in particolare, di rappresentare ogni vettore geometrico con un segmento orientato $\vec{OP}$, con $P \in \pi$.



Con un abuso di notazione, scriveremo

$$V = \{\text{segmenti orientati } \vec{OP},\ P \in \pi\}$$

questo è un abuso di notazione in quanto l'uguaglianza si ottiene attraverso la funzione biunivoca

e chiameremo vettori gli elementi di V.

Notiamo che $\forall\, v \in V,\ \exists!\ P \in \pi$ tale che $v = \vec{OP}$.

Definiamo ora due operazioni su V.

OPERAZIONI SU V

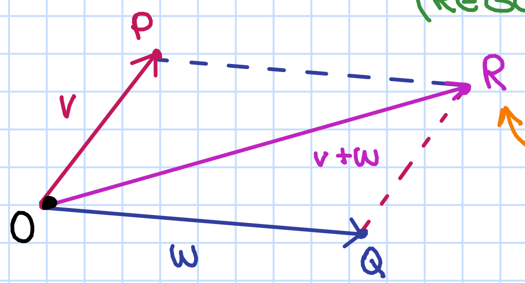
- **SOMMA DI VETTORI**

Siano $v, w \in V$ e siano $P, Q \in \pi$ tali che

$$v = \overrightarrow{OP} \quad e \quad w = \overrightarrow{OQ}$$

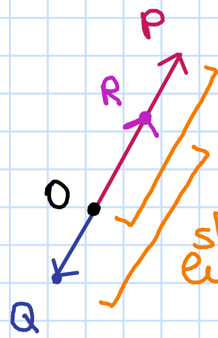
Definiamo

$v + w = \overrightarrow{OR}$, tale che $OPRQ$ è un parallelogramma.
(REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA)



costruisco R in modo tale che OPRQ è un parallelogramma

Nota: E se O, P e Q sono collineari, cioè giacciono sulla stessa retta?



Costruisco R tale che i segmenti OP e RQ hanno la stessa lunghezza (in un parallelogramma i lati opposti sono congruenti).

Otteniamo così un' operazione binaria interna:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(v, w) \longmapsto v + w$$

- **MOLTIPLICAZIONE PER SCALARI**

Sia $v \in V$ e sia $P \in \pi$ tale che $v = \overrightarrow{OP}$.
Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definiamo

$$\lambda \cdot v = \overrightarrow{OR}$$

tale che:

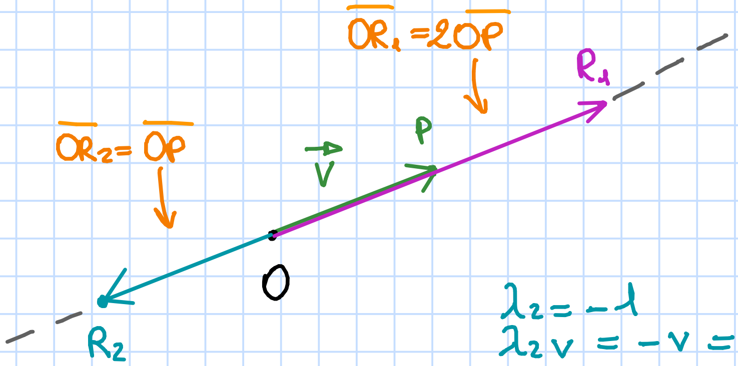
- O, P e R sono collineari (sulla stessa retta)
- $\overline{OR} = |\lambda|\,\overline{OP}$

lunghezza del segmento OR

valore assoluto di λ: $|\lambda| = \begin{cases} \lambda, & \text{se } \lambda \geq 0 \\ -\lambda & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} \overrightarrow{OR} \text{ è orientato concordemente a } \overrightarrow{OP}, \text{ se } \lambda > 0 \\ \overrightarrow{OR} \text{ è orientato discordemente a } \overrightarrow{OP}, \text{ se } \lambda < 0 \\ \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OO}, \text{ se } \lambda = 0 \end{cases}$

<u>Esempio</u>:



$\lambda_1 = 2$

$\lambda_1 v = 2v = \overrightarrow{OR_1}$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_2 v = -v = \overrightarrow{OR_2}$

Otteniamo così un' <u>operazione binaria esterna</u>:

$\mathbb{R} \not\subseteq V$

- $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

  $(\lambda, \vec{v}) \longmapsto \lambda \cdot \vec{v}$

Siano Γ e X due insiemi.
Un'operazione binaria <u>esterna</u> $*$ è una funzione:

$$* : \Gamma \times X \longrightarrow X$$
$$(\gamma, x) \longmapsto \gamma * x$$

<u>Nota</u> che a priori non esiste nessuna relazione insiemistica tra Γ e X

Tuttavia è "complicato" lavorare con queste operazioni definite geometricamente. Vorremmo poterle tradurre "in forma algebrica".

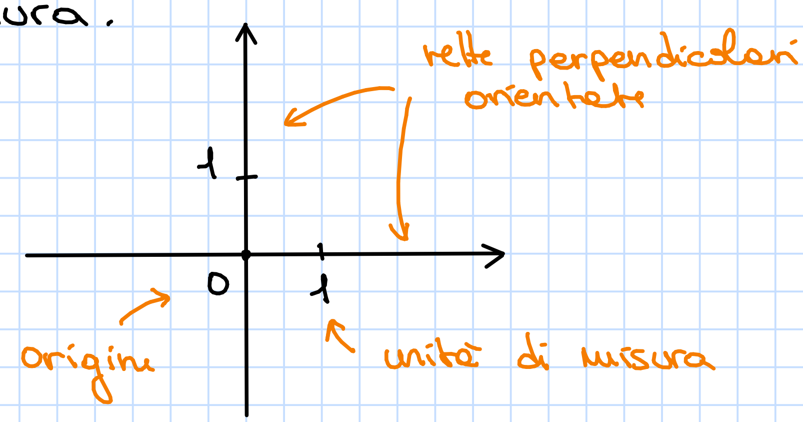
A tale scopo partiamo da qualcosa che conoscete bene: il piano cartesiano

PIANO CARTESIANO

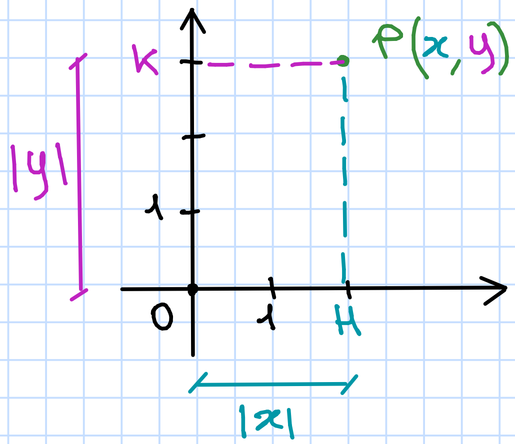
Il piano cartesiano è un sistema di riferimento basato sulle coordinate cartesiane.

A scuola vi hanno insegnato che per definirlo avete bisogno di:

- due rette perpendicolari e orientate (chiamate assi cartesiani) che si intersecano in un punto O (chiamato origine)
- un'unità di misura.



Ora ogni punto P del piano può essere identificato da due coordinate x e y (chiamate ascissa e ordinata) i cui valori assoluti sono le lunghezze delle proiezioni ortogonali OH e OK sugli assi,



Quindi, fissato un riferimento cartesiano abbiamo una biezione:

$$\{P : P \in \pi\} \xleftrightarrow{\text{biezione}} \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

ogni punto $P \in \pi$ definisce il vettore $\vec{OP}$

$$\Big\updownarrow \text{ biezione}$$

$$V = \{\text{segmenti orientati } \vec{OP} : P \in \pi\}$$

In particolare esiste una biezione:

$$V \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$

$\forall P \in \pi$, $\overrightarrow{OP} \longmapsto (x,y)$, dove x,y sono l'ascissa e l'ordinata di P

$\overrightarrow{OP} \longleftarrow\!\!| \ (x,y)$

dove P è il punto di coordinate (x,y)

Ora vogliamo tradurre le operazioni su V in operazioni su $\mathbb{R}^2$. Più precisamente vogliamo rispondere alle domande seguenti?

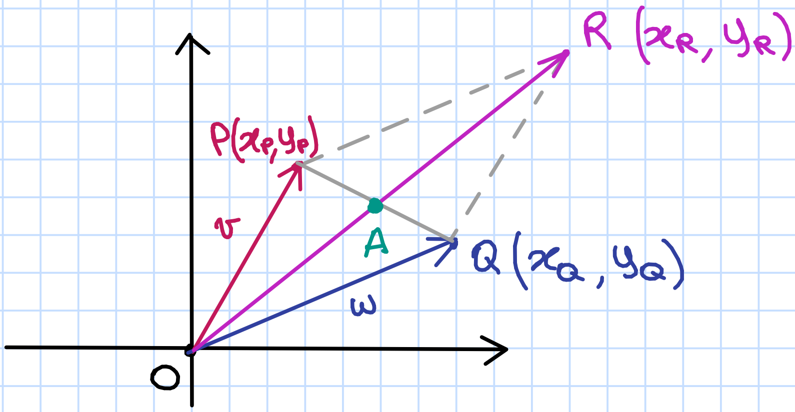
① Siano $v = \overrightarrow{OP}$, $w = \overrightarrow{OQ} \in V$: quali sono le coordinate del punto R tale che $v + w = \overrightarrow{OR}$?

② Siano $v = \overrightarrow{OP}$, $\lambda \in \mathbb{R}$: quali sono le coordinate del punto R tale che $\lambda \cdot v = \overrightarrow{OR}$?

Rispondiamo a queste domande facendo un po' di geometria.

① $v, w \in V$

$$\left.\begin{array}{l} v = \overrightarrow{OP},\ P(x_P, y_P) \\ w = \overrightarrow{OQ},\ Q(x_Q, y_Q) \end{array}\right\} \Rightarrow v + w = \overrightarrow{OR},\ R(x_R, y_R)$$



OPRQ è un parallelogramma

$\Downarrow$

le diagonali OR e PQ si tagliano a metà

Quindi $A(x_A, y_A)$ è al tempo stesso il punto medio di OR e di PQ:

A punto medio di OR $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_A = \dfrac{x_R + 0}{2} = \dfrac{x_R}{2} \\ y_A = \dfrac{y_R + 0}{2} = \dfrac{y_R}{2} \end{cases}$

A punto medio di PQ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_A = \dfrac{x_P + x_Q}{2} \\ y_A = \dfrac{y_P + y_Q}{2} \end{cases}$

Ma allora

$$\frac{x_R}{2} = \frac{x_P + x_Q}{2}, \quad \frac{y_R}{2} = \frac{y_P + y_Q}{2} \Longrightarrow (x_R, y_R) = (x_P + x_Q, y_P + y_Q)$$

$$\begin{array}{ccccc} \overrightarrow{OP} & + & \overrightarrow{OQ} & = & \overrightarrow{OR} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ (x_P, y_P) & + & (x_Q, y_Q) & = & (x_P + x_Q, y_P + y_Q) \end{array}$$

Quindi definiamo un'operazione binaria interna "+" su $\mathbb{R}^2$ nel modo seguente

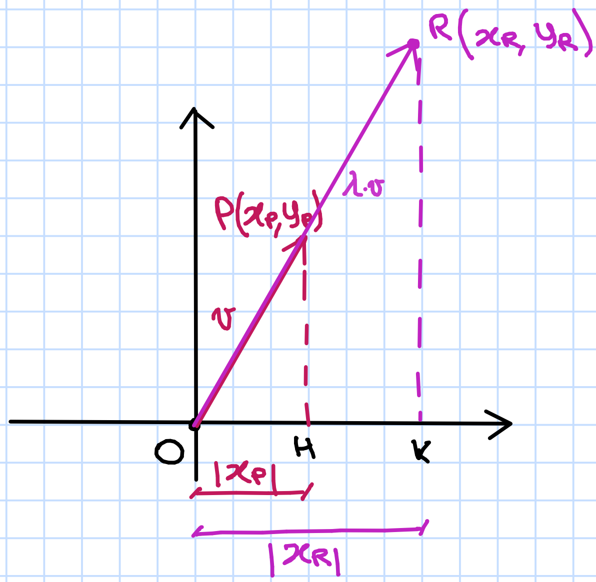
$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (\underbrace{x_1 + x_2, \; y_1 + y_2}_{\text{somme in } \mathbb{R}})$$

esempio : $(1, 3) + (-1, 4) = (1 + (-1), 3 + 4) = (0, 7)$

(2) $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$v = \overrightarrow{OP}$, $P(x_P, y_P)$ $\Rightarrow$ $\lambda \cdot v = \overrightarrow{OR}$, $R(x_R, y_R)$



(qui nell'esempio $\lambda = 2$)

Per costruzione, i triangoli $\hat{OPH}$ e $\hat{ORK}$ sono simili. Inoltre, dalla definizione dell'operazione di moltiplicazione per scalare su V, sappiamo che $\overline{OR} = |\lambda| \overline{OP}$.

Ne deduciamo che $|\lambda|$ è il fattore di proporzionalità.

Consideriamo ora due casi.

Se $\lambda \geq 0$, $\vec{OR}$ è concorde a $\vec{OP}$ e quindi:

$$\begin{cases} x_R = |\lambda| x_P = \lambda x_P \\ y_R = |\lambda| y_P = \lambda y_P \end{cases}$$

$\lambda \geq 0$

Se $\lambda < 0$, $\vec{OR}$ è discorde a $\vec{OP}$ e quindi:

$$\begin{cases} x_R = -|\lambda| x_P = \lambda x_P \\ y_R = -|\lambda| y_P = \lambda y_P \end{cases}$$

$\lambda < 0$

In ogni caso (per $\lambda \geq 0$ e $\lambda < 0$) abbiamo che

$$\begin{cases} x_R = \lambda x_P \\ y_R = \lambda y_P \end{cases}$$

Quindi definiamo un'operazione binaria esterna "$\cdot$" su $\mathbb{R}^2$ nel modo seguente

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\lambda, (x,y)) \longmapsto \lambda \cdot (x,y) := (\lambda x, \lambda y)$$

moltiplicazione in $\mathbb{R}$

esempio: $(-4) \cdot (1, -2) = (-4 \cdot 1, -4 \cdot (-2)) = (-4, 8)$

In conclusione abbiamo definito due operazioni su $\mathbb{R}^2$ "compatibili" con le operazioni definite su V:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{(binaria interna)}$$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{(binaria esterna)}$$

$$(\lambda, (x,y)) \longmapsto \lambda \cdot (x,y) := (\lambda x, \lambda y)$$

Vediamo ora quali sono le proprietà di queste operazioni.

Proprietà

1) COMMUTATIVITÀ (conseguenza del fatto che $(\mathbb{R},+)$ è commutativo)

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_2,y_2)+(x_1,y_1)$

2) ASSOCIATIVITÀ (conseguenza del fatto che $(\mathbb{R},+)$ è associativo)

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2,$

$$\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big)+(x_3,y_3) = (x_1,y_1)+\big((x_2,y_2)+(x_3,y_3)\big)$$

3) ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO (conseguenza dell'esistenza dell'elemento neutro in $(\mathbb{R},+)$)

$(0,0) \in \mathbb{R}^2$ è tale che $(x,y)+(0,0) = (0,0)+(x,y) = (x,y)$,
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4) ESISTENZA DELL'OPPOSTO (conseguenza dell'esistenza dell'opposto in $(\mathbb{R},+)$)

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists (x',y') \in \mathbb{R}^2$ tale che $(x,y)+(x',y') = (x',y')+(x,y) = (0,0)$

$(x' = \underbrace{-x}_{\text{opposto di } x \text{ in } \mathbb{R} \text{ rispetto a } +} \;\text{ e }\; y' = -y)$

5) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA DI $\mathbb{R}^2$

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda\cdot\big((x_1,y_1) \underset{\text{somma in } \mathbb{R}^2}{+} (x_2,y_2)\big) = \lambda\cdot(x_1,y_1)+\lambda(x_2,y_2)$$

6) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA DI $\mathbb{R}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}:$

$$(\lambda \underset{\text{somma in } \mathbb{R}}{+} \mu)\cdot(x,y) = \lambda(x,y)+\mu(x,y)$$

7) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda\mu\cdot(x,y) = \lambda\cdot(\mu\cdot(x,y))$

8) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 1\cdot(x,y) = (x,y)$ ($1 \in \mathbb{R}$ è elemento neutro della moltiplicazione per scalari)

elemento neutro di $\mathbb{R}$ rispetto alla moltiplicazione

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è il nostro primo esempio di "spazio vettoriale" su $\mathbb{R}$.

Più in generale uno spazio vettoriale (o spazio lineare) è una struttura algebrica composta da:

- un campo K, i cui elementi sono detti scalari (nel nostro esempio $K = \mathbb{R}$)
- un insieme V, i cui elementi sono detti vettori
- due operazioni binarie caratterizzate da determinate proprietà

Def: Sia $K \overset{(K,+,\cdot)}{=}$ un campo. Uno spazio vettoriale su K è un insieme V dotato di due operazioni:

$$+ : V \times V \to V$$

$$\cdot : K \times V \to V$$

che verificano le seguenti proprietà:

1) COMMUTATIVITÀ: $\forall\, v, w \in V$, $v + w = w + v$

2) ASSOCIATIVITÀ: $\forall\, u, v, w \in V$, $u + (v + w) = (u + v) + w$.

per differenziarlo da 0, elemento neutro di $(K,+)$

3) ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO: $\exists\, \underline{0} \in V$ t.c. $\underline{0} + v = v + \underline{0} = v$, $\forall v \in V$

4) ESISTENZA DELL'OPPOSTO: $\forall\, v \in V$, $\exists\, v' \in V$ t.c. $v + v' = v' + v = \underline{0}$.

5) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA DI VETTORI

$\forall\, v, w \in V$, $\forall\, \lambda \in K$, $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$

6) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA DI SCALARI

$\forall\, v \in V$, $\forall\, \lambda, \mu \in K$, $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

7) $\forall\, v \in V$, $\forall\, \lambda, \mu \in K$, $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$.

8) $1 \cdot v = v$, $\forall\, v \in V$ (dove 1 è l'elemento neutro di $(K, \cdot)$)

Chiamiamo vettori gli elementi di V e scalari gli elementi di K.

$K = \mathbb{R} \to$ spazio vettoriale reale
$K = \mathbb{C} \to$ spazio vettoriale complesso.

N.B. : Nella definizione di spazio vettoriale, per non appesantire la notazione, usiamo lo stesso simbolo "+" per la somma in V e in K.
Tuttavia il contesto ci permetterà di distinguere le due operazioni e non ci sarà confusione.

OSSERVAZIONI : Sia V un K-spazio vettoriale.

1) In V esiste un unico vettore nullo che denotiamo $\underline{0}$.

Dim : Supponiamo che esistono due vettori nulli $\underline{0}_1$ e $\underline{0}_2$. Allora, per definizione, abbiamo:

$$\underline{0}_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \underline{0}_2 \text{ è un} \\ \text{elemento neutro} \\ \text{di } V}}{=} \underline{0}_1 + \underline{0}_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \underline{0}_1 \text{ è un elemento} \\ \text{neutro di } V}}{=} \underline{0}_2 \implies \underline{0}_1 = \underline{0}_2 .$$

2) $\forall\ v \in V$ esiste un unico opposto che denotiamo $-v$

Dim : Siano v_1 e v_2 due opposti di v. Allora per definizione abbiamo:

$$v_1 = v_1 + \underline{0} \underset{\substack{\uparrow \\ v_2 \text{ è l'opposto} \\ \text{di } v}}{=} v_1 + (v + v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proprietà} \\ \text{associativa}}}{=} (v_1 + v) + v_2 \underset{\substack{\uparrow \\ v_1 \text{ è l'opposto} \\ \text{di } v}}{=} \underline{0} + v_2 = v_2$$

$\underline{0}$ è il vettore nullo

3) $\forall\ v \in V$ si ha $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{elemento} \\ \text{neutro di } (K,+)}}{0} \cdot v = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elemento neutro} \\ \text{di } V}}{\underline{0}}$

Dim :

$$0 \cdot v \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \text{ elemento} \\ \text{neutro di } (K,+)}}{=} (0+0) \cdot v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proprietà distributiva} \\ \text{rispetto alla somma} \\ \text{di scalari}}}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v \implies$$

$$\implies \underbrace{0 \cdot v + (-0 \cdot v)}_{\substack{\parallel \\ \underline{0}}} = \underbrace{0 \cdot v + 0 \cdot v + (-0 \cdot v)}_{\substack{\parallel \\ 0 \cdot v + \underline{0} \\ \parallel \\ 0 \cdot v}} \implies 0 \cdot v = \underline{0}$$

$-0 \cdot v$ è il vettore opposto di $0 \cdot v$

4) $\forall \lambda \in K, \quad \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$

Dim

$$\lambda \cdot \underline{0} = \lambda \cdot (\underline{0} + \underline{0}) = \lambda \cdot \underline{0} + \lambda \cdot \underline{0}$$

In maniera analoga a ③ concludiamo che $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$

5) Siano $\lambda \in K$, $v \in V$ tali che $\lambda \cdot v = \underline{0}$, allora $\lambda = 0$ o $v = \underline{0}$.

Dim per esercizio.