LEZIONE 5 - GEOMETRIA e ALGEBRA

21/03/23

Oggetti fondamentali di studio in algebra lineare sono i sistemi di equazioni lineari:

esempio di equazione lineare in 2 incognite: (a coefficienti reali) $3x - y = 2$

sistema di 2 equazioni lineari in 3 incognite: (a coefficienti reali) $(*)$ $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

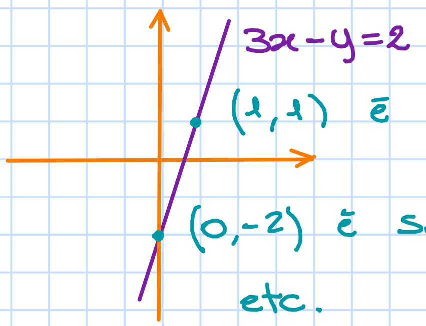
Una <u>soluzione</u> del sistema lineare $(*)$ è un vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che verifica <u>tutte</u> le equazioni del sistema

<u>esempio</u>: $(1,2,3)$ è una soluzione di $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1+2+3=6 \checkmark \\ 2\cdot 1-2=0 \checkmark \end{pmatrix}$

Dato un sistema lineare, vogliamo poter rispondere alle seguenti domande:

1) Il sistema ha soluzioni?
2) Se sì, "quante" sono? Come si calcolano?
3) Come possiamo interpretare geometricamente l'insieme delle soluzioni S? (Soprattutto nel caso di 2 o 3 incognite, cioè $S \subseteq \mathbb{R}^2$ o $S \subseteq \mathbb{R}^3$).

<u>esempio</u>: le soluzioni di $3x - y = 2$ formano una retta nel piano



$(1,1)$ è soluzione di $3x-y=2$

$(0,-2)$ è soluzione di $3x-y=2$

etc.

Notiamo che possiamo racchiudere tutte le informazioni del sistema lineare $(*)$ in una tabella di numeri:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y=0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Questo è il nostro primo esempio di matrice...

Quindi uno strumento utile per la risoluzione di sistemi lineari (ma non solo!) sono le matrici.

LE MATRICI: un (altro) esempio di spazio vettoriale, ma soprattutto uno <u>strumento</u> compatto e conciso per rappresentare diversi oggetti matematici, tra cui molti nel contesto dell'algebra lineare.

Sia K un campo (potete sempre immaginare $K=\mathbb{R}$)
Siano $m,n \geq 1$ due interi.

Def: Una matrice $m \times n$ a elementi in K è una tabella rettangolare di $m \cdot n$ elementi di K disposti su m righe e n colonne.

<u>esempio</u>: $K=\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ è una matrice } \underset{\text{numero righe}}{2} \times \overset{\text{numero colonne}}{3}.$$

In un certo senso le matrici sono la versione "bidimensionale" dei vettori numerici di K^n.

<u>Notazione</u>: Denotiamo le matrici con le lettere maiuscole.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{i-esima riga}$$

j-esima colonna

In maniera più compatta possiamo scrivere

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad a_{ij} \in K$$

elemento generico: a_{ij} → j: indice di colonna; i: indice di riga

Un po' di terminologia

- Ciascuno degli elementi della matrice è detto <u>entrata</u> (o coefficiente) della matrice.

- Se $n = m$, una matrice $n \times n$ si dice <u>quadrata</u> di ordine n.

  Se A è quadrata di ordine n, gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ costituiscono la <u>diagonale principale</u> di A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

diagonale: $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{nn})$

N.B.: • ogni elemento della diagonale (principale) è della forma a_{ii} (stesso indice di riga e di colonna)

• non si parla di diagonale per matrici <u>non</u> quadrate.

- Una matrice $1 \times n$ è chiamata <u>vettore riga</u>
- Una matrice $n \times 1$ è chiamata <u>vettore colonna</u>

<u>esempio</u>: • $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ è una matrice quadrata di ordine 2

• $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ è un vettore riga 1×3

• $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ è un vettore colonna 2×1

Notazione

$\mathcal{M}_{m,n}(K) = \{$Matrici $m \times n$ a elementi in $K\}$

$\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_{n,n}(K) = \{$matrici quadrate $n \times n$ a elementi in $K\}$

<u>esempio</u>: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Def: Siano $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Diciamo che $A=B$ se

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall\, i \in \{1,\dots,m\}, \quad \forall\, j \in \{1,\dots,n\}$$

esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$: $A \neq B$ perché $a_{12} \neq b_{12}$.

Definiamo due operazioni su $\mathcal{M}_{m,n}(K)$:

- SOMMA DI MATRICI

$$+ : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(K)$$
$$(A, B) \longmapsto A+B$$

dove $A+B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ è definita nel modo seguente:

$$A=(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=(b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

(A e B hanno la stessa taglia)

$$A+B := (a_{ij}+b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+(-3) & 2+0 & 3+4 \\ 4+5 & 5+\sqrt{2} & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 9 & 5+\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$A+C$ non è definita perché A e C non hanno la stessa taglia: $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

- MOLTIPLICAZIONE PER SCALARI

$$\cdot : K \times \mathcal{M}_{m,n}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(K)$$
$$(\lambda, A) \longmapsto \lambda \cdot A$$

dove $\lambda \cdot A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ è definita nel modo seguente:

$\lambda \in K$, $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

$$\lambda \cdot A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2 \Rightarrow \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -14 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

Proprietà

1) + COMMUTATIVA : $A+B = B+A$, $\forall A,B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$
2) + ASSOCIATIVA : $(A+B)+C = A+(B+C)$, $\forall A,B,C \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$
3) ELEMENTO NEUTRO rispetto a +

$$0_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(la matrice nulla)

dove 0 è l'elemento neutro di $(K,+)$

4) OPPOSTO rispetto a +

Se $A = (a_{ij}) \Rightarrow -A = (-a_{ij})$

$-a_{ij}$ è l'opposto di a_{ij} in K.

5) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda \cdot B$, $\forall A,B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\forall \lambda \in K$
6) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\forall \lambda, \mu \in K$
7) $(\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\forall \lambda, \mu \in K$
8) $1 \cdot A = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Quindi $\forall m,n \geq 1$ $(\mathcal{M}_{m,n}(K), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su K.

Ma le matrici sono più di un semplice spazio vettoriale. In particolare è possibile definire un'operazione di prodotto tra matrici. Tale operazione prende anche il nome di prodotto riga per colonna e ora capiamo perché.

Siano $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(K)$ un vettore riga e $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ un vettore colonna.

Definiamo il prodotto di $(a_1, \dots, a_n)$ per $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ come lo scalare ottenuto nel modo seguente:

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_i b_i$$

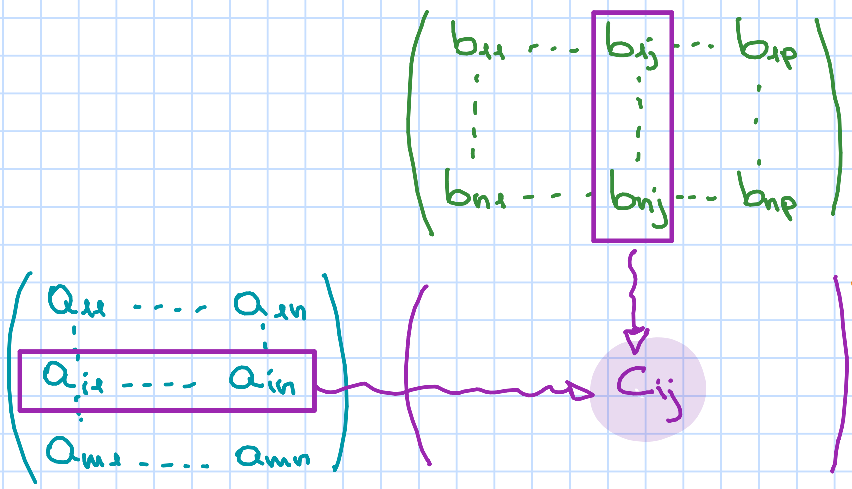
<u>esempio</u> : $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 = -1.$

Notiamo che questa definizione funziona solo nel caso in cui il vettore riga è costituito dallo stesso numero di elementi del vettore colonna, o in altre parole, quando il numero di colonne del vettore riga è uguale al numero di righe del vettore colonna.

Più in generale il prodotto di matrici è una funzione:

$$\cdot : \mathcal{M}_{m,n}(K) \times \mathcal{M}_{n,p}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,p}(K)$$
$$(A, B) \longmapsto C = AB$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}, \quad C = AB = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le p}}$$



ogni entrata della matrice prodotto è il risultato del prodotto di una riga di A per una colonna di B. Poiché A ha m righe e B ha p colonne, $m \times p$ è la taglia di AB.

dove per ogni $1 \le i \le m$ e per ogni $1 \le j \le p$

$$c_{ij} := \underbrace{(a_{i1} \dots a_{in})}_{\text{i-esima riga di A}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}_{\text{j-esima colonna di B}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

ovvero l'elemento generico c_{ij} di AB è il prodotto della <u>i-esima riga di A</u> e della <u>j-esima colonna di B</u>.

N.B.: poiché per calcolare il prodotto AB dobbiamo calcolare i prodotti di righe di A per colonne di B, AB è definito se e solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.

Esempi

① $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$

$B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$

B ha 4 colonne
A ha 3 righe

Posso calcolare AB (ma non BA)

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 31 & 11 & 6 & -7 \\ -5 & -5 & -2 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}) \end{array}$$

② $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Notiamo che i prodotti AB e BA sono entrambi definiti, ma $AB \neq BA$.

Infatti il prodotto di matrici <u>non</u> è commutativo.

③ $A = (1\ 2\ 3) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Possiamo calcolare sia AB che BA, ma ottengo matrici di taglia diverse.

$$AB = (1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Def: Diciamo che due matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ <u>commutano</u> se $AB = BA$.

→ affinchè $AB=BA$ entrambi i prodotti devono essere definiti e avere la stessa taglia. Quindi l'unica possibilità è che A,B siano quadrate dello stesso ordine.

<u>esempio</u>: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

poichè $AB=BA$ diciamo che A e B commutano.

<u>Proprietà del prodotto di matrici</u>

1) è <u>associativo</u>:

$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $\forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$

$(AB)C = A(BC)$.

$m \times n$, $n \times p$, $p \times q$

2) è <u>distributivo</u> rispetto a +:

$\forall A,B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\forall C,D \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$:

$(A+B)C = AC + \ C$

$A(C+D) = AC + AD$

4) $\forall \lambda \in K$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

NB: $\forall a,b \in \mathbb{R}$ abbiamo il prodotto notevole:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tale identità è una conseguenza della commutatività del prodotto in $\mathbb{R}$, e non è più vera nel contesto delle matrici.

Infatti, $\forall A, B \in M_n(K)$

$$(A+B)^2 := (A+B)(A+B) \underset{\text{proprietà distributiva}}{=} (A+B)A + (A+B)B = A^2 + \underbrace{BA + AB}_{\substack{BA \neq AB \\ \text{(in generale)}}} + B^2$$

e non possiamo semplificare ulteriormente.

Ma se A e B commutano allora otteniamo di nuovo il prodotto notevole:

$$(A+B)^2 \underset{AB=BA}{=} A^2 + 2AB + B^2$$

Elemento neutro rispetto al prodotto

Poiché il prodotto non è commutativo, dobbiamo distinguere tra elemento neutro a sinistra e a destra.

Partiamo da un esempio:

Consideriamo $M_{2,3}(\mathbb{R})$.

Una matrice I_s è un elemento neutro a sinistra per $M_{2,3}(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto se

$$I_s A = A, \quad \forall A \in M_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Sia $A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$.

Innanzitutto, se $\underset{2\times 2}{I_s} \underset{2\times 3}{A} = \underset{2\times 3}{A} \Rightarrow I_s \in M_2(\mathbb{R})$

Cerchiamo dunque $I_s = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tale che:

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} a'a + b'd = a \\ a'b + b'e = b \\ a'c + b'f = c \\ c'a + d'd = d \\ c'b + d'e = e \\ c'c + d'f = f \end{cases}$$

Si vede facilmente che $(a',b',c',d')=(1,0,0,1)$ è una soluzione del sistema $\forall\, a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$.

In altre parole $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ è un elemento neutro sinistro per $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto.

Mostriamo che $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ è l'<u>unico</u> elemento in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con tale proprietà, esibendo una matrice A per cui l'unico inverso a sinistra è proprio $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Sia $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Allora se $\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ è tale che
$$\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}b'=0\\a'=1\\d'=1\\c'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

In modo simile si mostra che $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ è l'elemento neutro destro per $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto.

Più in generale definiamo:

<u>Def</u>: $\forall\, n\geq 1$, la matrice <u>identità</u> o <u>unità</u> di ordine n è
$$I_n=(\delta_{ij})\in\mathcal{M}_n(K)$$
dove
$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{se } i=j\\0 & \text{se } i\neq j\end{cases}$$

dove 1 è l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione di K.

delta di Kronecker

<u>esempio</u>: $I_1=(1)$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Per $n\geq 1$
$$I_n=\begin{pmatrix}1&&0\\&1&\\0&&\ddots\;1\end{pmatrix}$$

cioè la matrice quadrata di ordine n che ha zeri ovunque tranne sulla diagonale dove ha tutti 1.

Si può facilmente mostrare che $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ si ha

$$I_m A = A \quad e \quad A I_n = A$$

l' ~~uno~~ si può dimostrare che è unico

cioè I_m (risp. I_n) è ~~un~~ elemento neutro sinistro (risp. destro) per $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ rispetto al prodotto.

In particolare I_n è l'elemento neutro (sinistro e destro) per $\mathcal{M}_n(K)$, cioè:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(K), \quad I_n A = A I_n = A.$$