LEZIONE 9 - GEOMETRIA e ALGEBRA

04/04/23

Ultime considerazioni sui sistemi lineari

Consideriamo il caso particolare di un sistema lineare $AX = b$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertibile.

Proposizione (METODO DELL' INVERSA)

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matrice invertibile e $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Allora il sistema lineare

$$AX = b$$

possiede l'unica soluzione $X = A^{-1}b$, dove A^{-1} è l'inversa di A

Dim

- Mostriamo innanzitutto che $\underline{x} = A^{-1}b$ è soluzione di (*). Infatti abbiamo

$$A\,A^{-1}b = (AA^{-1})b = I_n b = b$$

- (unicità) Mostriamo che $\underline{x} = A^{-1}b$ è l'unica soluzione di (*). Sia $\underline{y}$ una soluzione di (*). Allora abbiamo:

$$A\underline{y} = b \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}\underline{y} = A^{-1}b \Rightarrow \underbrace{I_n}\underline{y} = A^{-1}b \Rightarrow \underline{y} = A^{-1}b = \underline{x}$$

Abbiamo dunque mostrato che il sistema (*) possiede un'unica soluzione data da $\underline{x} = A^{-1}b$.

Esempio: L'unica soluzione del sistema lineare:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b}$$

è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esercizio 4} \\ \text{foglio 2}}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Come calcolare l'inversa di una matrice?

Purtroppo daremo solo un accenno in questo corso, ma è utile sapere che l'algoritmo di Gauss-Jordan può essere utilizzato per calcolare in modo efficiente l'inversa di una matrice.

Idea: Se esiste una successione di operazioni elementari che "trasformano" A nella matrice identità, allora A è invertibile.

Più precisamente, se $P_1, \dots, P_r$ sono le matrici elementari corrispondenti alle operazioni di cui sopra (come spiegato nell'esercizio 5 del foglio 3), allora si ha:

$$\underbrace{P_r \cdots P_1}_{} A = I_n$$

Quindi: $A^{-1} = P_r \cdots P_1$. Di conseguenza A^{-1} può essere calcolata effettuando le stesse operazioni su I_n:

$$P_r \cdots P_1 \left(A \;\middle|\; I_n \right) = \left(I_n \;\middle|\; \underbrace{P_r \cdots P_1}_{\text{l'inversa di } A \text{ appare qui}} \right)$$

Esempio: Riprendiamo la matrice precedente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per determinare l'inversa di A affianchiamo ad A la matrice identità ed effettuiamo le operazioni sulla matrice 3×6 così ottenuta finché non otteniamo nel primo blocco la matrice identità:

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} \right) \xrightarrow{\text{operazioni elementari}} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} \;\middle|\; \underbrace{A^{-1}}_{\text{in questo blocco otteniamo l'inversa di } A} \right)$$

$$\left(\begin{matrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right)$$

$$\Big\downarrow \; R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{matrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right)$$

$$\Big\downarrow R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

A questo punto uso i pivots in ordine inverso per rendere la matrice diagonale

$$\Big\downarrow R_2 \leftarrow R_2 - R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \begin{array}{l} R_1 \leftarrow -1 \cdot R_1 \\ R_2 \leftarrow \frac{1}{3} R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

A^{-1}

Ritroviamo dunque (fortunatamente!) che $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Prima di lasciare i sistemi lineari per un po', consideriamo un sistema lineare <u>omogeneo</u> a coefficienti in K:

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

non dimentichiamo che K^n ha una struttura di spazio vettoriale

Chiamiamo S_0 l'insieme delle soluzioni di $(*)$.
Notiamo che S_0 è un <u>sottoinsieme di K^n</u> con qualche interessante proprietà:

1) $(0, \dots, 0) \in S_0 \Rightarrow S_0 \neq \emptyset$ (il vettore nullo è sempre soluzione di un sistema omogeneo)

2) se $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in S_0 \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \in S_0$

(La somma di due soluzioni di un sistema omogeneo è ancora una soluzione del sistema)

Dim

Se $(x_1,\dots,x_n), (y_1,\dots,y_n) \in S_0$, allora abbiamo

$$a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n \overset{1}{=} 0 \quad \text{e} \quad a_{i1}y_1+\dots+a_{in}y_n \overset{2}{=} 0 \quad , \forall\, i=1,\dots,m.$$

Mostriamo che anche $(x_1+\dots+x_n)+(y_1+\dots+y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \in S_0$, cioè è soluzione di $a_{i1}X_1+\dots+a_{in}X_n=0$, $\forall i$. Abbiamo:

$$a_{i1}(x_1+y_1)+\dots+a_{in}(x_n+y_n) = \underbrace{a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n}_{\overset{1}{=}\,0} + \underbrace{a_{i1}y_1+\dots+a_{in}y_n}_{\overset{2}{=}\,0} = 0.$$

□

3) se $(x_1,\dots,x_n) \in S_0 \implies \lambda(x_1,\dots,x_n) \in S_0$, $\forall\, \lambda \in K$.

Dim

Se $(x_1,\dots,x_n) \in S_0 \implies a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n = 0$, $\forall\, i=1,\dots,m$:

Mostriamo che anche $\lambda(x_1,\dots,x_n) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n) \in S_0$.
Per ogni $i=1,\dots,m$ abbiamo:

$$a_{i1}(\lambda x_1)+\dots+a_{in}(\lambda x_n) = \lambda a_{i1}x_1+\dots+\lambda a_{in}x_n = \lambda\,(\underbrace{a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n}_{=0}) = 0$$

□

Le proprietà 1, 2 e 3 fanno di S_0 un "sottospazio vettoriale" di K^n.

Più in generale, per uno spazio vettoriale V su K definiamo:

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K.
Un sottoinsieme W di V si dice SOTTOSPAZIO VETTORIALE se:

1) $W \neq \emptyset$.

operazioni di V

2) $\forall\, w_1, w_2 \in W$, $w_1+w_2 \in W$ (W è chiuso rispetto alla somma)

3) $\forall\, w \in W$, $\forall\, \lambda \in K$, $\lambda \cdot w \in W$ (W è chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari)

Osservazioni:

- Si noti che la proprietà 3 implica che $\underline{0} \in W$.
Infatti, sia $w \in W$ (w esiste poiché $W \neq \emptyset$).
Allora per $\lambda=0$ abbiamo $0 \cdot w = \underline{0} \in W$.

- Un sottospazio vettoriale è uno spazio vettoriale:
  - l'elemento neutro $\underline{0}$ appartiene a W per l'osservazione precedente
  - $\forall\, w \in W$ $\;-w = (-1)\cdot w \in W$ per la proprietà 3 ($\lambda=-1$)
  - Tutte le altre proprietà discendono da V in quanto gli elementi di W sono anche elementi di V ($W \subseteq V$) e V è uno spazio vettoriale.

Esempi

1) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo a n incognite e coefficienti in K è un sottospazio vettoriale di K^n.

2) Ogni spazio vettoriale V ha due sottospazi vettoriali "banali":

- $W_1 = \{ \underline{0} \}$, dove $\underline{0}$ è il vettore nullo di V.
- $W_2 = V$

3) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1 \}$

W <u>non</u> è un sottospazio vettoriale poichè $\underbrace{(0,0,0)}_{\text{vettore nullo di } \mathbb{R}^3} \notin W$.

4) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \}$.

W non è un sottospazio vettoriale poichè $(1,0), (1,1) \in W$, ma $(1,0)+(1,1) = (2,1) \notin W$ $(2 > 1)$. Quindi W non verifica la proprietà (2)

5) Sia $V = K^n$ e $W := \{ (0, x_2, \dots, x_n) : x_i \in K \ \forall i = 2, \dots, n \}$.

W è un sottospazio vettoriale di V. Infatti:

usiamo la definizione di sottospazio vettoriale

① $(0, \dots, 0) \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$.

② siano $\underline{x} = (0, x_2, \dots, x_n)$, $\underline{y} = (0, y_2, \dots, y_n) \in W$.

Allo $\underline{x} + \underline{y} = (0, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) \in W$

prima coordinata nulla

③ Siano $\underline{x} = (0, x_2, \dots, x_n) \in W$, $\lambda \in K$.

Allora $\lambda \cdot \underline{x} = (0, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in W$

Avremmo potuto concludere che W è un sottospazio vettoriale anche osservando che W rappresenta l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\{ X_1 = 0$$

6) Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $v \in V$, $v \neq \underline{0}$, un vettore non nullo.

L'insieme

$$< v > = \{ \lambda v , \lambda \in K \}$$

è un sottospazio vettoriale costituito da tutti i multipli di V.

Infatti:

1) $\underline{0} = 0 \cdot v \in \langle v \rangle \Rightarrow \langle v \rangle \neq \emptyset$.

2) Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \langle v \rangle$ e siano $\lambda, \mu \in K$ tali che $\underline{x} = \lambda v$, $\underline{y} = \mu v$.

Allora $\underline{x} + \underline{y} = \lambda v + \mu v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proprietà} \\ \text{spazio vettoriale}}}{=} \underbrace{(\lambda + \mu)}_{\in K} v \Rightarrow \underline{x} + \underline{y} \in \langle v \rangle$

3) Sia $\underline{x} \in \langle v \rangle$ e sia $\lambda \in K$ tale che $\underline{x} = \lambda v$.

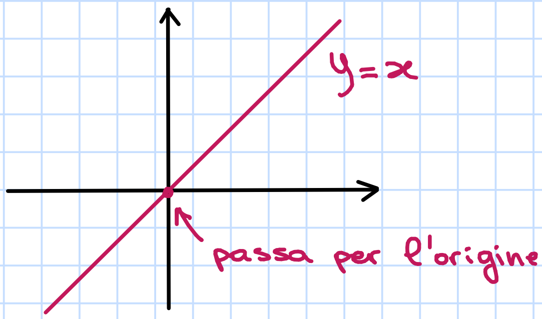
Allora, $\forall\, a \in K$, $a\underline{x} = \underbrace{a\lambda}_{\in K} v \in \langle v \rangle$.

Tale sottospazio prende il nome di retta vettoriale. Il nome è giustificato dalla seguente interpretazione geometrica:

Sia $V = \mathbb{R}^2$ e $v = (1,1)$.

Allora $\langle v \rangle = \{ \lambda(1,1) : \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ (\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R} \} =$
$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \}$.

Quindi $\langle v \rangle$ corrisponde alla retta di equazione $y = x$:



Più in generale se $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ allora $\langle v \rangle$ è la retta passante per l'origine definita dall'equazione:

$$bx - ay = 0.$$

Osservazione: Si noti quindi che l'insieme dei punti di una retta del piano che non passa per l'origine non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ (poiché non contiene il vettore nullo $(0,0)$). Parleremo in questo caso di "retta affine" invece che retta vettoriale.