LEZIONE 13 - GEOMETRIA e ALGEBRA

19/04/23

Richiamiamo dalla lezione precedente il lemma di Steinitz.

Lemma (di Steinitz)

Sia V uno spazio vettoriale con base $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ e siano $w_1,\dots,w_p \in V$.

$$w_1,\dots,w_p \text{ sono linearmente indipendenti} \Rightarrow p \leq n.$$

Utilizziamo il lemma di Steinitz per dimostrare il teorema seguente:

Teorema (di equipotenza delle basi)

Sia V uno spazio vettoriale su K.
Siano $\{v_1,\dots,v_n\}$ e $\{w_1,\dots,w_p\}$ due basi di V. Allora $n=p$.

Dim

Poiché $\{v_1,\dots,v_n\}$ è una base di V e $w_1,\dots,w_p$ sono linearmente indipendenti, allora il lemma di Steinitz implica che $p \leq n$.

Poiché $\{w_1,\dots,w_p\}$ è una base di V e $v_1,\dots,v_n$ sono linearmente indipendenti, allora il lemma di Steinitz implica che $n \leq p$.

Quindi abbiamo $p \leq n$ e $n \leq p$, quindi $n=p$.

Il teorema di equipotenza delle basi giustifica la definizione seguente:

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $\{v_1,\dots,v_n\}$ una base finita di V.

Il numero n si dice DIMENSIONE di V e si denota con $\dim_K(V)$ (o semplicemente $\dim(V)$).

Se $V=\{\underline{0}\}$ allora si pone $\dim(V)=0$.

Se $V=\{\underline{0}\}$ oppure V ha una base finita diciamo che V ha DIMENSIONE FINITA.

Oss: Si noti che $V=\{\underline{0}\}$ non possiede una base in quanto l'unico vettore, $\underline{0}$, è linearmente dipendente.

Esempi

1) $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2, poiché abbiamo visto che $\{(1,0),(0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

2) $V = K^n$, $n \geq 1$.

Siano

$e_1 = (1,0,\dots,0)$,
$e_2 = (0,1,0,\dots,0)$,
$\vdots$
$e_n = (0,\dots,0,1)$.

[$\forall\, i=1,\dots,n$, e_i è il vettore con tutti zero tranne alla i-esima componente che è uguale a 1

È facile mostrare che $\{e_1,\dots,e_n\}$ è una base di K^n, detta BASE CANONICA di K^n.

In particolare abbiamo $\dim_K(K^n) = n$. $(\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n, \forall n \geq 1)$

Sia $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n) \in K^n$. Allora

$$\underline{x} = x_1e_1 + \dots + x_ne_n,$$

cioè la n-upla delle coordinate cartesiane di $\underline{x}$ rispetto a $\{e_1,\dots,e_n\}$ è data da $\underline{x}$ stesso.

3) Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Consideriamo le matrici:

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Per ogni $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}.$$

Inoltre si può facilmente mostrare che $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ sono linearmente indipendenti.

Quindi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ è una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, da cui:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$$

4) Più in generale, una base di $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ è $\{E_{ij}\}_{\substack{1\leq i\leq m \\ 0\leq j\leq n}}$, dove

$E_{ij} = (e_{hl})$, con $e_{hl} = \begin{cases} 1 & \text{se } h=i \text{ e } l=j. \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

In particolare otteniamo $\dim_K \mathcal{M}_{m,n}(K) = mn$.

La base $\{E_{ij}\}_{\substack{1\leq i\leq m \\ 0\leq j\leq n}}$ così definita è detta base canonica di $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base di V.
Consideriamo la funzione:

$$\varphi_{\mathcal{B}}: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & K^n \\ v=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n & \longmapsto & (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \end{array}$$

che ad ogni vettore $v \in V$ associa la n-upla delle sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.

La funzione $\varphi_{\mathcal{B}}$ è biettiva (le coordinate sono univocamente determinate). Inoltre $\varphi_{\mathcal{B}}$ soddisfa le seguenti proprietà:

1) $\forall\ w_1, w_2 \in V,\quad \varphi_{\mathcal{B}}(w_1+w_2)=\varphi_{\mathcal{B}}(w_1)+\varphi_{\mathcal{B}}(w_2)$

Dim

Siano $w_1, w_2 \in V$ e siano $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_n \in K$ t.c.

$$w_1=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n,\quad w_2=\mu_1 v_1+\dots+\mu_n v_n$$

Allora $\varphi_{\mathcal{B}}(w_1)=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ e $\varphi_{\mathcal{B}}(w_2)=(\mu_1,\dots,\mu_n)$.

Ora $w_1+w_2=(\lambda_1+\mu_1)v_1+\dots+(\lambda_n+\mu_n)v_2$. Quindi abbiamo:

$$\varphi_{\mathcal{B}}(w_1+w_2)=(\lambda_1+\mu_1,\dots,\lambda_n+\mu_n)=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)+(\mu_1,\dots,\mu_n)=\varphi_{\mathcal{B}}(w_1)+\varphi_{\mathcal{B}}(w_2).$$

2) $\forall\ \lambda \in K, \forall\ w \in V,\quad \varphi_{\mathcal{B}}(\lambda w)=\lambda\varphi_{\mathcal{B}}(w)$.

Dim

Sia $w=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n \in V$. Allora $\varphi_{\mathcal{B}}(w)=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.
Ora $\lambda w=(\lambda\lambda_1)v_1+\dots+(\lambda\lambda_n)v_n$. Quindi abbiamo:

$$\varphi_{\mathcal{B}}(\lambda w)=(\lambda\lambda_1,\dots,\lambda\lambda_n)=\lambda(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\lambda\varphi_{\mathcal{B}}(w).$$

Le proprietà 1 e 2 fanno di $\varphi_{\mathcal{B}}$ quella che chiameremo nella seconda parte del corso un' "applicazione lineare".
Chiamiamo $\varphi_{\mathcal{B}}$ ISOMORFISMO COORDINATO di V rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Abbiamo il teorema seguente:

<u>Teorema</u>: Sia $V \neq \{0\}$ e siano $\mathcal{L}=\{v_1,\dots,v_p\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti e $\mathcal{G}=\{v_1,\dots,v_p,\dots,v_m\}$ $(m \geq p)$ un sistema di generatori.

Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$$

linearmente indipendenti

sistema di generatori

Idea della dim

- Se $v_1, \dots, v_p$ generano V, allora $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$.
- Altrimenti si considera $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{v_{i_1}\}$, $v_{i_1} \in \mathcal{G}$, scelto in modo tale che $v_1, \dots, v_p, v_{i_1}$ siano linearmente indipendenti.

  Se $\mathcal{L}_1$ genera V allora $\mathcal{B} = \mathcal{L}_1$.
- Altrimenti si continua in modo analogo a costruire insiemi di vettori linearmente indipendenti tali che:

$$\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \dots \subseteq \mathcal{G}$$

finchè non si ottiene un sistema di generatori $\mathcal{L}_k$ tale che

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_k \subseteq \mathcal{G}.$$

Si noti che il fatto che $\mathcal{G}$ è un sistema di generatori finito garantisce che tale procedimento ha termine.

Quindi $\mathcal{B} = \mathcal{L}_k$ è una base che soddisfa le inclusioni

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}.$$

Da questo teorema possiamo dedurre i seguenti corollari.

Corollario 1: Sia $V \neq \{\underline{0}\}$ uno spazio vettoriale su K di dimensione finita. Allora:

1) Da qualsiasi sistema di generatori è possibile estrarre una base di V

2) È possibile completare qualsiasi insieme di vettori linearmente indipendenti a una base di V.

Dim

1) Sia $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_m\}$ un sistema di generatori di V e sia $i \in \{1, \dots, m\}$ tale che $v_i \neq \underline{0}$

   Allora $\mathcal{L} = \{v_i\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti e per il teorema, esiste una base $\mathcal{B}$ tale che $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. In particolare $\mathcal{B}$ è una base contenuta in $\mathcal{G}$.

2) Sia $\mathcal{L}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti e sia $\mathcal{B}$ una base di V. Allora $\mathcal{L} \cup \mathcal{B}$ è un sistema di generatori che contiene $\mathcal{L}$. Quindi, per il teorema, esiste una base $\mathcal{B}'$ tale che $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{L} \cup \mathcal{B}$. In particolare $\mathcal{B}'$ è una base che contiene $\mathcal{L}$.

Corollario 2: Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione n.

1) Ogni sistema di generatori di V con n elementi è una base di V.

2) Ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti è una base di V.

dim

1) Sia $\mathcal{G}=\{v_1,\dots,v_n\}$ un sistema di generatori. Per il corollario 1 esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{G}$. Ma $\mathcal{B}$ ha n elementi per il teorema di equipotenza delle basi. Quindi $\mathcal{B}=\mathcal{G}$.

2) Sia $\mathcal{L}=\{v_1,\dots,v_n\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti. Per il corollario 1 esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{B}$. Ma $\mathcal{B}$ ha n elementi, quindi $\mathcal{B}=\mathcal{L}$.

Esempio

Sia $V=\mathbb{R}^3$ e siano $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(4,6,9)\in\mathbb{R}^3$.

Allora $\mathcal{L}=\{v_1,v_2\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti poiché v_1 e v_2 non sono collineari.

Completiamo $\mathcal{L}$ a una base di $\mathbb{R}^3$.

[Ricordiamo che $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)=3$, quindi dobbiamo aggiungere a $\mathcal{L}$ solo un terzo vettore v_3 in modo tale che v_1,v_2 e v_3 siano linearmente indipendenti]

Notiamo che l'insieme $\mathcal{G}=\{v_1,v_2,\overbrace{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)}^{\text{generano } \mathbb{R}^3}\}$ è un sistema di generatori di V.

Per il teorema esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{B}\subseteq\mathcal{G}$.

La dimostrazione del teorema ci offre un procedimento per determinare $\mathcal{B}$.

Consideriamo l'insieme $\{(1,2,3),(4,6,9),(1,0,0)\}$. Notiamo che $v_1,v_2,(1,0,0)$ sono linearmente dipendenti. Infatti

$$(4,6,9)-3(1,2,3)=(1,0,0).$$

Consideriamo quindi piuttosto $\{(1,2,3),(4,6,9),(0,1,0)\}$. Si può facilmente mostrare che i vettori $(1,2,3)$, $(4,6,9)$ e $(0,1,0)$ sono linearmente indipendenti e costituiscono quindi, per il Corollario 2, una base di $\mathbb{R}^3$.

Quindi $\mathcal{B}=\{(1,2,3),(4,6,9),(0,1,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ che contiene $\mathcal{L}$ come richiesto.

Vediamo ora qualche risultato sulla dimensione dei sottospazi di uno spazio vettoriale.

<u>Proposizione</u>: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia W un sottospazio vettoriale di V. Allora:

1) $\dim(W) \leq \dim(V)$.

2) $\dim(W) = \dim(V) \iff W = V$

<u>Dim</u>

Supponiamo $\dim(V) = n$.

1) Se $W = \{0\}$, allora $\dim(W) = 0 \leq n$ (quindi ① è soddisfatta)

Supponiamo dunque $W \neq \{0\}$.

Poichè $W \neq \{0\}$, $\exists\ v_1 \in W$, $v_1 \neq \underline{0}$. Poniamo $\mathcal{L}_1 = \{v_1\}$.

Come nella dimostrazione del teorema di esistenza della base possiamo costruire una successione $\mathcal{L}_i$ di insiemi di i vettori linearmente indipendenti tali che:

$$\mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \ldots \subseteq W$$

e il processo si arresta quando $\mathcal{L}_k$ è un sistema di generatori, cioè una base di W.

Si noti che $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{L}_k$ è una base di W altrimenti per $i > n$, $\mathcal{L}_i$ è un insieme di $i > n$ vettori linearmente indipendenti, una contraddizione con il lemma di Steinitz.

Ma allora W ha dimensione finita e $\mathcal{L}_k$ è una base di W. Come già notato, per il lemma di Steinitz $|\mathcal{L}_k| \leq n$, cioè $\dim(W) \leq n = \dim(V)$.

2) $\Leftarrow$) ovvio

$\Rightarrow$) Supponiamo $\dim(W) = n$ e sia $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base di W. Ma $w_1, \ldots, w_n$ sono anche vettori linearmente indipendenti di V. Poichè $\dim(V) = \dim(W) = n$, $\mathcal{B}$ è anche una base di V. In particolare:

$$W \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{B} \text{ base di } W \\ \Rightarrow w_1,\ldots,w_n \text{ generano } W}}{=} \langle w_1, \ldots, w_n \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{B} \text{ base di } V \\ \Rightarrow w_1,\ldots,w_n \text{ generano } V}}{=} V \implies W = V.$$

<u>Osservazione</u>: Se W è un sottospazio tale che $\dim(W)=0$, allora $W=\{\underline{0}\}$.

<u>Def</u>: Sia V uno spazio vettoriale e $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Allora l'intero

$$\dim(V)-\dim(W)$$

si dice codimensione di W in V.

In un certo senso la codimensione misura quanto un sottospazio W di V è "lontano" da V.

Abbiamo la seguente formula che, dati due sottospazi $U, W \subseteq V$, mette in relazione $\dim(U)$, $\dim(W)$, $\dim(U \cap W)$, $\dim(U+W)$.

<u>Teorema</u> (FORMULA DI GRASSMANN)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano U, W due sottospazi di V.

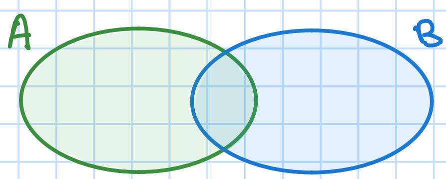
Allora $U \cap W$ e $U+W$ hanno dimensione finita e

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

In particolare, se $U \oplus W$ è somma diretta, allora $\dim(U \cap W)=0$ e

$$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W).$$

<u>Osservazione</u>: La formula di Grassmann è l'analoga della formula della cardinalità dell'unione di due insiemi:



$$|A \cup B| = \underbrace{|A| + |B|}_{\substack{\text{in questa somma gli elementi dell'intersezione} \\ \text{sono contati due volte.} \\ \text{Una volta per A e una volta per B.}}} - |A \cap B|$$

<u>Esempio</u>

Utilizziamo la formula di Grassmann per rispondere alla domanda seguente

Sia $V = \mathbb{R}^5$ e siano U, W due sottospazi di dimensione 3.
Si può avere $V = U \oplus W$?

Sappiamo:

1) $\dim(U) = 3$
2) $\dim(W) = 3$
3) $U + W \subseteq \mathbb{R}^5 \Rightarrow \dim(U+W) \leq \dim(\mathbb{R}^5) = 5$

Usiamo la formula di Grassmann per ottenere informazioni sulla dimensione dell'intersezione:

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) =$$
$$= 3 + 3 - \dim(U+W) \geq$$
$$\geq 3 + 3 - 5 = 1$$

$\dim(U+W) \leq 5$

Otteniamo quindi che $\dim(U \cap W) \geq 1$. In particolare $U \cap W \neq \{0\}$ (altrimenti $\dim(U \cap W) = 0$).
Quindi $\mathbb{R}^5$ non è somma diretta di U e W.