LEZIONE 14 - GEOMETRIA e ALGEBRA

26/04/23

Richiamiamo la formula di Grassmann vista nella lezione precedente.

Teorema (FORMULA DI GRASSMANN)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano U, W due sottospazi di V.

Allora $U \cap W$ e $U+W$ hanno dimensioni finita e

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

In particolare, se $U \oplus W$ è somma diretta, allora $\dim(U \cap W) = 0$ e

$$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W).$$

Vediamo ora degli esempi su come si determinano una base e la dimensione di $U+W$ e di $U \cap W$, date una base di U e una base di W.

Innanzitutto la proposizione seguente ci dice come determinare un sistema di generatori di $U+W$ dati un sistema di generatori di U e un sistema di generatori di W.

Proposizione: Siano U e W due sottospazi vettoriali di V tali che:

$$U = \operatorname{Span}\{u_1, \dots, u_p\} \quad \text{e} \quad W = \operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_q\}$$

Allora $U+W = \operatorname{Span}\{u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q\}$.

Dim

Sia $x \in U+W$, allora $\exists$ $u \in U$ e $w \in W$ tali che

$$x = u + w.$$

Poichè $\{u_1, \dots, u_p\}$ e $\{w_1, \dots, w_q\}$ sono sistemi di generatori rispettivamente di U e di W, allora $\exists$ $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q \in K$ tali che

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \quad \text{e} \quad w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_q w_q.$$

Quindi

$$x = u + w = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_q w_q.$$

Ne segue che $\{u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q\}$ è un sistema di generatori di $U+W$.

Attenzione: Se $\mathcal{B}_U$, $\mathcal{B}_W$ sono basi rispettivamente di U e W, allora $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è un sistema di generatori di $U+W$, ma non è detto che sia una base di $U+W$.

Infatti $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è una base di $U+W$ se e solo se $U \cap W = \{\underline{0}\}$. (Si veda Esercizio 6, Foglio 5.)

Esempio

$V = \mathbb{R}^4$

$U = \langle (1,0,2,3), (0,1,2,2) \rangle$

$W = \{(x,y,z,t) : 2y-3z=0 \text{ e } x+z=0\}$

Problema:

1. Determinare la dimensione e una base di U e di W.
2. Determinare la dimensione e una base di $U+W$.
3. Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.
4. $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$?

1. • Chiaramente una base di U è data da $\{(1,0,2,3), (0,1,2,2)\}$, in quanto i vettori $(1,0,2,3)$ e $(0,1,2,2)$ generano U e sono linearmente indipendenti.

In particolare $\dim(U) = 2$.

• Il sottospazio W coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2Y-3Z=0 \\ X+Z=0 \end{cases}$$

nelle variabili X, Y, Z, T.

Pertanto per determinare una base di W risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2Y-3Z=0 \\ X+Z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X=-Z \\ Y=\frac{3}{2}Z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-s_1 \\ y=3/2\, s_1 \\ z=s_1 \\ t=s_2 \end{cases}, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

Quindi abbiamo:

$$W = \{(-s_1, \tfrac{3}{2}s_1, s_1, s_2) : s_1, s_2 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{s_1(-1, \tfrac{3}{2}, 1, 0) + s_2(0,0,0,1) : s_1, s_2 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathrm{Span}\{(-1, \tfrac{3}{2}, 1, 0), (0,0,0,1)\}$$ $\longrightarrow$ si noti che questi due vettori si ottengono rispettivamente per $s_1=1, s_2=0$ e $s_1=0$ e $s_2=1$.

Poichè i vettori $(-1, \frac{3}{2}, 1, 0)$ e $(0,0,0,1)$ sono linearmente indipendenti, una base di W è $\{(-1, \frac{3}{2}, 1, 0), (0,0,0,1)\}$ e $\dim(W) = 2$.

(2) Notiamo che $U, W \subseteq U+W \subseteq \mathbb{R}^4 \implies 2 \leq \dim(U+W) \leq 4$.

Per la proposizione precedente l'insieme $G = \{(1,0,2,3), (0,1,2,2), (-1, 3/2, 1, 0), (0,0,0,1)\}$ è un sistema di generatori di $U+W$, ossia:

$$U+W = \langle (1,0,2,3), (0,1,2,2), (-1, 3/2, 1, 0), (0,0,0,1) \rangle.$$

Estraiamo da G una base di $U+W$.

$\mathcal{L} = \{(1,0,2,3), (0,1,2,2)\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Si può facilmente mostrare che non possiamo completare $\mathcal{L}$ con $(-1, 3/2, 1, 0)$, in quanto $(1,0,2,3)$, $(0,1,2,2)$ e $(-1, 3/2, 1, 0)$ sono sono linearmente dipendenti $(-(1,0,2,3) + 3/2(0,1,2,2) = (-1, 3/2, 1, 0))$.

Consideriamo quindi $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{(0,0,0,1)\}$. Si mostra facilmente che $\mathcal{L}_1$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti e, per costruzione, è una base di $U+W$.

Quindi una base di $U+W$ è $\{(1,0,2,3), (0,1,2,2), (0,0,0,1)\}$ e $\dim(U+W) = 3$

(3) Dalla formula di Grassmann otteniamo:

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Per determinare una base di $U \cap W$ sarà sufficiente trovare un vettore non nullo appartenente sia ad U che a W.

<u>METODO SMART</u> (ma non sempre applicabile)

Abbiamo visto in (2) che $v = (-1, \frac{3}{2}, 1, 0)$ appartiene sia a U che a W.
Infatti v appartiene a W in quanto è un elemento della sua base e appartiene a U perchè è combinazione lineare dei generatori di U:

$$(-1, \tfrac{3}{2}, 1, 0) = -(1,0,2,3) + \tfrac{3}{2}(0,1,2,2).$$

Quindi $U \cap W = \langle (-1, \frac{3}{2}, 1, 0) \rangle$ e una base di $U \cap W$ è $\{(-1, \frac{3}{2}, 1, 0)\}$

<u>METODO MENO SMART (ma sempre applicabile)</u>

Determiniamo l'insieme $U \cap W = \{v : v \in U \text{ e } v \in W\}$.

Sia dunque $v \in U \cap W$.

- Poichè $v \in U$, allora $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1(1,0,2,3) + \lambda_2(0,1,2,2)$.
- Poichè $v \in W$, allora $\exists\ \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tali che $v = \lambda_3(-1,\frac{3}{2},1,0) + \lambda\,(0,0,0,1)$.

In particolare abbiamo

$$\lambda_1(1,0,2,3) + \lambda_2(0,1,2,2) = v = \lambda_3(-1,\tfrac{3}{2},1,0) + \lambda\,(0,0,0,1).$$
$$\Downarrow$$
$$(\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_1+2\lambda_2, 3\lambda_1+2\lambda_2) = \left(-\lambda_3, \tfrac{3}{2}\lambda_3, \lambda_3, \lambda_4\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = 3/2\ \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_4 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema nelle incognite $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ otteniamo l'insieme di soluzioni:

$$S = \{(\underset{\lambda_1}{\uparrow}\!\!-a, \underset{\lambda_2}{\uparrow}\!\tfrac{3}{2}a, \underset{\lambda_3}{\uparrow}\!a, \underset{\lambda_4}{\uparrow}\!0) : a \in \mathbb{R}\}$$

Quindi
- usando $\lambda_1 = -a,\ \lambda_2 = \frac{3}{2}a$: $\quad v = -a(1,0,2,3) + \frac{3}{2}a(0,1,2,2) = a(-1,\frac{3}{2},1,0)$
- usando $\lambda_3 = a,\ \lambda_4 = 0$: $\quad v = a(-1,\frac{3}{2},1,0) + 0\cdot(0,0,0,1) = a(-1,\frac{3}{2},1,0)$.

Chiaramente otteniamo la stessa cosa

Quindi $U \cap W = \{a(-1,\frac{3}{2},1,0) : a \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,\frac{3}{2},1,0)\rangle$.
Ritroviamo che una base di $U \cap W$ è $\{(-1, 3/2, 1, 0)\}$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

In conclusione abbiamo:

	DIMENSIONE	BASE
$U+W$	3	$\{(1,0,2,3), (0,1,2,2), (0,0,0,1)\}$
$U \cap W$	1	$\{(-2,3,2,0)\}$

(4) Chiaramente $\mathbb{R}^4 \neq U \oplus W$ in quanto $U \cap W \neq \{0\}$.
Si poteva anche notare che $\dim(U+W) = 3 \Rightarrow U+W \subsetneq \mathbb{R}^4$.

RANGO

Introduciamo ora la definizione di RANGO di un insieme di vettori che, tra le varie cose, ci permetterà di enunciare alcuni criteri di compatibilità di sistemi lineari.

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $\{v_1, ..., v_p\}$ un sottoinsieme finito di V.
Il **RANGO** di $\{v_1, ..., v_p\}$ è la dimensione del sottospazio vettoriale generato da $v_1, ..., v_p$:

$$rg(\{v_1, ..., v_p\}) = dim(\langle v_1, ..., v_p \rangle).$$

Equivalentemente è il numero <u>massimo</u> di vettori linearmente indipendenti in $\{v_1, ..., v_p\}$.

<u>Esempio</u>

Consideriamo il sottoinsieme $A = \{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,1,1,0)\}$.

Notiamo che il rango di A non può essere 3, poichè i vettori di A sono linearmente dipendenti $((0,1,1,0) = (0,1,0,0) + (0,0,1,0))$.

Il rango di A è 2 se A contiene due vettori linearmente indipendenti.

Chiaramente $(0,1,0,0)$ e $(0,0,1,0)$ sono linearmente indipendenti, quindi $rg(A) = 2$.

<u>Osservazioni</u>:

1) $0 \leq rg(\{v_1, ..., v_p\}) \leq p$.

In particolare:

$\rightarrow$ $rg(\{v_1, ..., v_p\}) = 0 \iff v_1 = ... = v_p = \underline{0}$.

$\rightarrow$ $rg(\{v_1, ..., v_p\}) = p \iff v_1, ..., v_p$ sono linearmente indipendenti.

2) Se $dim(V) = n$ e $v_1, ..., v_p \in V$ allora

$$\left.\begin{array}{l} rg(\{v_1, ..., v_p\}) \leq p \quad \text{(vedi oss. precedente)} \\ rg(\{v_1, ..., v_p\}) \leq n \quad \text{(lemma di Steinitz)} \end{array}\right\} \Rightarrow rg(\{v_1, ..., v_p\}) \leq \min\{n, p\}.$$

A partire da questa definizione, definiamo ora il rango di una matrice.

Def: Sia $A \in M_{m,n}(K)$.
Il RANGO PER RIGHE di A è il rango dell'insieme delle sue righe (vettori in K^n).
Il RANGO PER COLONNE di A è il rango dell'insieme delle sue colonne (vettori in K^m).

Esempio

Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$.

$(1,0,0,1)$ e $(0,1,0,0)$ sono linearmente indipendenti e $(1,-1,0,1) = (1,0,0,1) - (0,1,0,0)$.

rango per righe $= rg(\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,-1,0,1)\}) = 2$

rango per colonne $= rg(\{(1,0,1),(0,1,-1),(0,0,0),(1,0,1)\}) = 2$

$\langle (1,0,1),(0,1,-1),(0,0,0),(1,0,1) \rangle = \langle (1,0,1),(0,1,-1) \rangle$
e $\dim(\langle (1,0,1),(0,1,-1) \rangle) = 2$.

Notiamo che per la matrice A considerata il rango per righe è uguale al rango per colonne.

Non si tratta di una coincidenza, infatti abbiamo il risultato seguente, che per questioni di tempo non dimostreremo.

Teorema: Il rango per righe e il rango per colonne di una matrice coincidono.
Possiamo dunque chiamare semplicemente rango di $A \in M_{m,n}(K)$ il rango per righe (o per colonne) di A. Lo denotiamo $rg(A)$.

Osservazioni:

- Se $A \in M_{m,n}(K)$, allora $rg(A) \leq \min\{m,n\}$.

  Attenzione: le righe e le colonne di A non generano lo stesso sottospazio. Infatti tali sottospazi non sono neanche necessariamente contenuti nello stesso spazio vettoriale (se $m \neq n$, $K^m \neq K^n$).

- Poiché il rango per righe è uguale al rango per colonne abbiamo:

  $rg(A) = rg(A^T)$

Esempio: Consideriamo la matrice a scalini:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango, calcolando il rango per righe.

Per definizione abbiamo:

$$rg(M) = rg(\{(1,2,3,4,5), (0,6,7,8,9), (0,0,0,10,11), (0,0,0,0,12), (0,0,0,0,0)\}) =$$
$$= \dim(\langle(1,2,3,4,5), (0,6,7,8,9), (0,0,0,10,11), (0,0,0,0,12), \cancel{(0,0,0,0,0)}\rangle).$$

chiaramente rimuovendo il vettore nullo lo spazio vettoriale generato non cambia.

Mostriamo che i vettori $(1,2,3,4,5)$, $(0,6,7,8,9)$, $(0,0,0,10,11)$, e $(0,0,0,0,12)$ sono linearmente indipendenti.
Siano $\lambda, \mu, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\lambda(1,2,3,4,5) + \mu(0,6,7,8,9) + \delta(0,0,0,10,11) + \gamma(0,0,0,0,12) = (0,0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \lambda,\ 2\lambda+6\mu,\ 3\lambda+7\mu,\ 4\lambda+8\mu+10\delta,\ 5\lambda+9\mu+11\delta+12\gamma) = (0,0,0,0,0).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ 2\lambda+6\mu=0 \\ 4\lambda+8\mu+10\delta=0 \\ 5\lambda+9\mu+11\delta+12\delta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=0 \\ \delta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

Quindi $rg(M)=4$. Notiamo che il rango di M è uguale al numero di righe non nulle di M.

Più in generale abbiamo:

Proposizione: Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero di righe non nulle.

Dim

Si mostra facilmente che le righe non nulle di una matrice a scalini sono linearmente indipendenti.

Con i prossimi due risultati mostriamo che è possibile calcolare il rango di una matrice utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan.

<u>Proposizione</u>: Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.
Siano $B \in \mathcal{M}_m(K)$, $C \in \mathcal{M}_n(K)$ due matrici <u>invertibili</u>.

Allora $rg(A) = rg(BA) = rg(AC)$,

ovvero moltiplicare a sinistra o a destra per una matrice invertibile non modifica il rango di A.

<u>Corollario</u>: Il rango di una matrice A è uguale al rango di una matrice a scalini B ottenuta da A attraverso delle operazioni elementari.
Inoltre il sottospazio generato dalle righe di A è lo stesso del sottospazio generato dalle righe di B.

<u>Dim</u>: Ogni operazione elementare corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per una matrice invertibile, che non modifica il rango.

<u>Esempio</u>

Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 5 & -14 \end{pmatrix}$.

Da quanto visto il rango di A è lo stesso del rango della matrice a scalini ottenuta da A attraverso delle operazioni elementari.

Effettuiamo dunque il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 5 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1}]{} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_2]{} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché la matrice a scalini ha rango 2 (2 righe non nulle) concludiamo che $rg(A) = 2$.

Questo semplice procedimento per il calcolo del rango di una matrice ci offre nuovi metodi per risolvere delle tipologie di problemi che abbiamo già affrontato, come illustrato qui di seguito.

<u>Applicazioni</u>

1) Calcolare una base e la dimensione del sottospazio seguente di $\mathbb{R}^5$:

$$U = \langle (1,-3,2,0,1), (1,1,3,1,3), (3,-5,2,1,7), (-1,7,-1,0,1), (0,4,1,1,2) \rangle.$$

Sia A la matrice che ha per righe i vettori che generano U:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 7 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\dim(U) = rg(A)$, calcoliamo il rango di A con il metodo di eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 7 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 + R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_2}]{}$$

$$\xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha 4 vettori non nulli $\Rightarrow rg(A) = 4$

Otteniamo $\dim(U) = 4$ e una base di U è data dalle righe non nulle della matrice a scalini ottenuta (in quanto esse generano lo stesso sottospazio delle righe della matrice di partenza).

Quindi $\{(1,-3,2,0,1), (0,4,1,1,2), (0,0,-5,0,2), (0,0,0,-1,0)\}$ è una base di U.

2) L'insieme $\{(1,1,1), (1,2,2), (1,2,3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$?

$\{(1,1,1), (1,2,2), (1,2,3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \{(1,1,1), (1,2,2), (1,2,3)\}$ sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3$.

Calcoliamo quindi il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 righe non nulle

Quindi $rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3$. Ne segue che $\{(1,1,1), (1,2,2), (1,2,3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Il rango ci permette facilmente di stabilire se una matrice è invertibile o meno. Abbiamo infatti il risultato seguente:

<u>Proposizione</u>: Una matrice quadrata $A \in M_n(K)$ è invertibile se e solo se $rg(A) = n$, ovvero una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo.

<u>Dim</u>

($\Rightarrow$) Sia $A \in M_n(K)$ una matrice invertibile. Allora esiste $A^{-1} \in M_n(K)$ tale che $AA^{-1} = I_n$. Ma allora:

$$rg(A) = rg(AA^{-1}) = rg(I_n) = n$$

il rango non cambia se moltiplichiamo per una matrice invertibile.

I_n è una matrice a scalini con n righe non nulle.

($\Leftarrow$) Sia $A \in M_n(K)$ di rango n e siano $R_1, \dots, R_n \in K^n$ le righe di A. Allora $\{R_1, \dots, R_n\}$ è una base di K^n. In particolare $R_1, \dots, R_n$ generano K^n.

Siano

$$\begin{aligned} E_1 &:= (1, 0, \dots, 0), \\ E_2 &:= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ E_n &:= (0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

vettori della base canonica di K^n.

Allora, poiché $R_1, \dots, R_n$ generano K^n, $\exists\, b_{ij} \in K$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, tali che

$$\begin{aligned} E_1 &= b_{11} R_1 + \dots + b_{1n} R_n \\ E_2 &= b_{21} R_1 + \dots + b_{2n} R_n \\ &\vdots \\ E_n &= b_{n1} R_1 + \dots + b_{nn} R_n. \end{aligned}$$

Sia $B = (b_{ij}) \in M_n(K)$.

È facile allora mostrare che $BA = I_n$. Quindi A è invertibile.

<u>Esempio</u>

Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & k \end{pmatrix}$ è invertibile?

Sappiamo che A è invertibile se e solo se $rg(A) = 3$.

Calcoliamo il rango, riducendo A a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & K \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 7R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & K-21 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & K-9 \end{pmatrix}$$

3 righe non nulle $\iff K \neq 9$.

Quindi $rg(A) = 3$ se e solo se $K \neq 9$. Ne segue che A è invertibile se e solo se $K \neq 9$.