LEZIONE 15 - GEOMETRIA e ALGEBRA

28/04/23

Nella Lezione 14 abbiamo definito il rango di un insieme di vettori e di una matrice.
Torniamo ora ai sistemi lineari, poiché la nozione di rango permette di stabilire facilmente se un sistema è compatibile o meno.

Teorema di Rouché-Capelli (criterio di compatibilità di un sistema lineare)

I parte

Un sistema lineare di m equazioni e n incognite

$$AX=b,$$

dove $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(K)$, $b\in M_{m,1}(K)$ e $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ è compatibile se e solo se $rg(A)=rg(A|b)$.

II parte

In tal caso il sistema possiede ∞^{n-r} soluzioni, dove $r=rg(A)$.

Dim

I parte

Per definizione il sistema $AX=b$ è compatibile se e solo se esiste $(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ tale che

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=b \underset{A=(a_{ij})}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix} \Longleftrightarrow x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}+\dots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix} \text{ è combinazione lineare di } \begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix} \Longleftrightarrow rg(A)=rg(A|b).$$

II parte

Supponiamo ora che $AX=b$ sia un sistema compatibile.
Sia $r=rg(A)\underset{\text{I parte}}{=}rg(A|b)$.

Applicando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan a $(A|b)$, otteniamo una matrice a scalini con r righe non nulle e quindi r pivots (si noti che l'ultimo pivot non appartiene all'ultima colonna, altrimenti $rg(A)\neq rg(A|b)$).

Quindi il sistema possiede n-r variabili libere e quindi ∞^{n-r} soluzioni.

Esempio

Per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ il sistema seguente è compatibile?

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1 \\ X_1 + X_4 = 3 \\ -X_2 - X_3 + 7X_4 = 6 \\ -X_1 - 2X_2 - 2X_3 + 3X_4 = K . \end{cases}$$

Consideriamo la matrice orlata associata al sistema e riduciamola a scalini con l'algoritmo di Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 7 & 6 \\ -1 & -2 & -2 & 3 & K \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 + R_1}]{} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & K+1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_2}]{}$$

A $\quad$ b

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & K-1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - \frac{4}{7}R_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7K-23}{7} \end{array}\right)$$

Quindi $rg(A) = 3$ e $rg(A|b) = \begin{cases} 3 & \text{se } K = \frac{23}{7} \\ 4 & \text{se } K \neq \frac{23}{7} \end{cases}$.

Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile se e solo se $K = \frac{23}{7}$.

Osservazione: Se $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, cioè se $AX = b$ è un sistema omogeneo, allora $rg(A) = rg(A|b)$. Quindi ritroviamo che un sistema omogeneo è sempre compatibile. Inoltre l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di K^n di dimensione $n-r$, dove $r = rg(A)$.

Esempio:

Determinare la dimensione e una base del sottospazio

$$S = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x - 2y + 3t = 0 \\ y - z + t = 0 \\ 2x - y - 3z + 9t = 0 . \end{cases} \right\}$$

Per la dimensione di S determiniamo il rango di $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $r = rg(A) = 2$. Poichè il sistema possiede 4 variabili, $\dim(S) = 4-2 = 2$.

Per determinare una base di S, determiniamo l'insieme delle soluzioni del sistema.
La matrice a scalini ottenuta corrisponde al sistema:

$$\begin{cases} X - 2Y + 3T = 0 \\ Y - Z + T = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{variabili libere}]{\text{scegliamo } Z \text{ e } T \text{ come}} \begin{cases} X - 2Y = -3T \\ Y = Z - T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 2Z - 5T \\ Y = Z - T \end{cases}.$$

Quindi
$$S = \{(x,y,z,t) : y = z-t \text{ e } x = 2z-5t,\ z,t \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(2z-5t, z-t, z, t) : z,t \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{z(2,1,1,0) + t(-5,-1,0,1) : z,t \in \mathbb{R}\}$$

Ne segue che $(2,1,1,0)$ e $(-5,-1,0,1)$ generano S. Poichè $\dim(S)=2$ concludiamo che $\{(2,1,1,0), (-5,-1,0,1)\}$ è una base di S.

Si noti che $(2,1,1,0)$ si ottiene per $z=1$ e $t=0$ e $(-5,-1,0,1)$ per $z=0$ e $t=1$. Questa scelta di z e t assicura che i vettori ottenuti sono linearmente indipendenti.

IL DETERMINANTE

Il determinante è una funzione che associa a ogni matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(K)$ un elemento di K.

$$\det : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K$$
$$A \longmapsto \det(A).$$

Si denota:

$$|A| = \det(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nel suo significato originale il determinante serve a <u>determinare</u> l'unicità della soluzione di un sistema lineare.

Consideriamo ad esempio il sistema seguente:

$$\begin{cases} aX + bY = e \\ cX + dY = f \end{cases}$$

Supponiamo per comodità $a \neq 0$ e applichiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - \frac{c}{a}R_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & f - \frac{ec}{a} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{matrix} e \\ f \end{matrix}}_{b}$$

Il sistema possiede un'unica soluzione $\Leftrightarrow$ $rg(A) = rg(A|b) = 2 \Leftrightarrow d - \frac{bc}{a} \neq 0$
$\Leftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$.

Vedremo a breve che $ad-bc$ è proprio il determinante di una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

È possibile definire il determinante in vari modi. Noi lo definiremo attraverso la cosiddetta definizione assiomatica, che suggerisce anche un metodo di calcolo.

<u>Def</u>: Sia $n \geq 1$.
Il DETERMINANTE è l'<u>unica</u> funzione

$$M_n(K) \longrightarrow K$$

avente le proprietà seguenti:

1) $\det(I_n) = 1$.

2) Si comporta nel modo seguente rispetto all'algoritmo di Gauss-Jordan:

- se B è ottenuta scambiando due righe o due colonne di A, allora

$$\det(B) = -\det(A).$$

- se B è ottenuta da A moltiplicando una riga o una colonna di A per $\lambda \in K$, allora:

$$\det(B) = \lambda \det(A).$$

- se B è ottenuta da A sommando a una riga (risp. una colonna) un multiplo di un'altra riga (risp. un'altra colonna), allora

$$\det(B) = \det(A).$$

<u>Esempio</u>

Vediamo come possiamo utilizzare tale definizione per calcolare il determinante di una matrice A.
L'idea è quella di ridurre la matrice A, se possibile, alla matrice identità, di cui conosciamo il valore del determinante. Le operazioni effettuate permetteranno di "risalire" al valore del determinante della matrice di partenza A.

Supponiamo dunque di voler calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 + \frac{3}{5}R_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1 \\ R_2 \leftarrow -\frac{1}{5}R_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Quindi:

$$\det(A) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \det(I_2) = 1 \Rightarrow \det(A) = 10.$$

Come si calcola il determinante di una matrice $A \in M_n(K)$?

$\boxed{n=1}$ Sia $A = (a_{11}) \in M_1(K)$, allora $\det(A) = a_{11} \in K$.

<u>esempio</u>: $\det(-3) = -3$.

$\boxed{n=2}$ Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$. Allora $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \in K$.

<u>esempio</u>: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$, $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - (-6\cdot(-1)) = 0$

notare che le due righe sono proporzionali.

<u>Per $n \geq 3$</u> illustreremo un <u>procedimento ricorsivo</u> (o induttivo) per il calcolo del determinante di una matrice $A \in M_n(K)$ dovuto a Laplace.

Si tratta di un procedimento ricorsivo poichè il saper calcolare il determinante di una matrice $n \times n$ permette di calcolare il determinante di una matrice $(n+1) \times (n+1)$.

Prima di enunciare il teorema di Laplace dobbiamo introdurre alcune nozioni.

<u>Def</u>: Una sottomatrice $p \times q$ di una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ è una matrice costituita dagli elementi di A comuni a p righe e q colonne.
Se $i_1, \dots, i_p$ e $j_1, \dots, j_q$ sono rispettivamente gli indici scelti delle righe e delle colonne, allora denotiamo la sottomatrice corrispondente con

$$A(i_1 \cdots i_p \mid j_1 \cdots j_q).$$

Denotiamo

$$A_{ij} := A(1 \cdots \hat{i} \cdots m \mid 1 \cdots \hat{j} \cdots n)$$

la matrice ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R})$.

Allora:

$$A(\underset{i_1}{2}\ \underset{i_2}{3} \mid \underset{j_1}{2}\ \underset{j_2}{5}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$A(1\ 2 \mid 1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A_{15} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 6 & 7 & 8 & 9 & \cancel{10} \\ 11 & 12 & 13 & 14 & \cancel{15} \\ 16 & 17 & 18 & 19 & \cancel{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$

Proposizione: Se B è una sottomatrice di A allora $rg(B) \leq rg(A)$.

Def: Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$.
Per ogni $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ definiamo il COFATTORE o COMPLEMENTO ALGEBRICO dell'elemento a_{ij} di A

$$cof(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

La MATRICE COFATTORE di A è

$$cof(A) = \left(cof(A)_{ij} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(K).$$

Esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(K)$. Allora:

$$cof(A)_{23} = (-1)^{2+3} \det(A_{23}) = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(8-14) = 6.$$

elimino la 2^a riga e la 3^a colonna

Teorema di Laplace

Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

Per ogni $1 \le i \le n$ si ha:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

(sviluppo del determinante di A secondo la i-esima riga)

Per ogni $1 \le j \le n$ si ha:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

(sviluppo del determinante di A secondo la j-esima colonna)

Chiaramente il valore del determinante di A è indipendente dalla riga e dalla colonna scelta per lo sviluppo.

Esempio

$\boxed{n=3}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Come scelgo la riga o la colonna secondo la quale sviluppare il determinante?

Si nota subito che il metodo di Laplace è più efficiente se applicato a righe o colonne con "tanti" zero.

Per il nostro esempio scegliamo quindi di sviluppare secondo la prima colonna:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \underset{a_{11}}{2} \cdot (-1)^{1+1} \det \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}_{A_{11}} + \cancel{\underset{a_{21}}{0} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}_{A_{21}}} +$$

$$+ \underset{a_{31}}{1} \cdot (-1)^{3+1} \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{31}} =$$

$$= 2 \cdot (-5+2) + (-1-15) = -6 - 16 = -22.$$

Sia ora $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una generica matrice 3×3.

Sviluppando $\det(A)$ con il metodo di Laplace rispetto alla prima riga otteniamo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

Possiamo interpretare "visualmente" il risultato ottenuto nel modo seguente:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & +\;- & - & - \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

copio le prime due colonne qui

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12},$$

Questo metodo mnemonico, valido solo per il calcolo del determinante di una matrice 3×3, è detto

REGOLA DI SARRUS.

Esempio

Calcolare il determinante della seguente matrice 4x4:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo il metodo di Laplace che ci permette di ridurre il calcolo del determinante di una 4x4 al calcolo di determinanti di 3x3.

sviluppo secondo la 2ª colonna

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2+8 + 24-5+2-15 = 12.$$

regola di Sarrus