LEZIONE 16 - GEOMETRIA e ALGEBRA

03/05/23

Nella Lezione 15 abbiamo definito il determinante di una matrice quadrata e abbiamo visto come calcolarlo con il metodo di Laplace.

In particolare, il metodo di Laplace permette di dimostrare le osservazioni seguenti.

Osservazioni

1) Sia $A \in M_n(K)$ una matrice con una riga o una colonna nulla. Allora $\det(A) = 0$.

<u>Dim</u>: sviluppando il determinante rispetto alla riga o alla colonna nulla si ottiene $\det(A)=0$.

2) Il determinante di una matrice diagonale è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale.

<u>Dim</u>:

Procediamo per induzione.
Per ogni $n \geq 1$ vogliamo dunque mostrare che

$$P(n) = \text{"} \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \text{"}$$

è vera

<u>BASE DELL' INDUZIONE</u>: $n=1$: $\det(a_{11}) = a_{11} \Rightarrow P(1)$ è vera.

<u>PASSO INDUTTIVO</u>: mostriamo che se $P(n)$ è vera, allora $P(n+1)$ è vera.

IPOTESI INDUTTIVA: Supponiamo dunque che $\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Allora abbiamo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_{nn} & \\ 0 & & & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{(n+1)+(n+1)} \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

sviluppo secondo l'ultima riga

$$= a_{n+1,n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii}.$$

ipotesi induttiva

Quindi $P(n+1)$ è vera e l'asserto è dimostrato.

3) Se $A \in \mathcal{M}_n(K)$ è una matrice triangolare superiore o inferiore allora $\det(A)$ è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale.

Dim.: per esercizio.

Quest'ultimo punto, in particolare, suggerisce un metodo per il calcolo del determinante attraverso l'algoritmo di Gauss-Jordan.
Infatti l'algoritmo di Gauss-Jordan riduce una qualsiasi matrice quadrata in una matrice triangolare superiore.

Calcolare il determinante di una matrice con l'algoritmo di Gauss-Jordan.

Supponiamo di dover calcolare il determinante di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

L'algoritmo di Gauss Jordan permette di ridurre A in una matrice triangolare superiore $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ unicamente attraverso delle operazioni di I e III tipo:

$$A \xrightarrow[\substack{\text{Operazioni elementari di:} \\ \cdot\ \text{I tipo: } R_i \leftrightarrow R_j \\ \cdot\ \text{III tipo: } R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j}]{} B = (b_{ij}) \quad \text{TRIANGOLARE SUPERIORE}$$

Dalla definizione assiomatica del determinante otteniamo:

$$\det(A) = \underbrace{(-1)}_{\substack{\text{ogni permutazione} \\ \text{cambia il segno} \\ \text{del determinante.}}}^{\#\text{permutazioni}} \det(B) = (-1)^{\#\text{permutazioni}} \prod_{i=1}^{n} b_{ii}$$

Esempio

Calcoliamo il determinante della 4x4 dell'esempio precedente con l'algoritmo di Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 + 5R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 + 4R_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 15 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_2]{}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 17 & -3 \\ 0 & 0 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - \frac{13}{17}R_3]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 17 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{17} \end{pmatrix} = B.$$

Poichè non abbiamo effettuato alcuna permutazione abbiamo:

$$\det(A) = (-1)^0 \det(B) = \det(B) \underset{\substack{\uparrow \\ B \text{ triangolare} \\ \text{superiore}}}{=} (-1)\cdot 1 \cdot 17 \cdot \left(-\frac{12}{17}\right) = 12.$$

Ritroviamo, ovviamente, lo stesso risultato precedente.

Il determinante gode delle seguenti proprietà.

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

1) Se $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ha una riga o una colonna nulla allora $\det(A) = 0$

2) Se $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ha due righe (o due colonne) uguali o proporzionali, allora $\det(A) = 0$.

3) Se una riga (risp. una colonna) di $A \in \mathcal{M}_n(K)$ è combinazione lineare di due o più righe (risp. di due o più colonne) allora $\det(A) = 0$.

4) Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Allora $\det(A) = \det(A^T)$.

Teorema di Binet

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Allora

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Osservazione: Una conseguenza del teorema di Binet è che se $A \in \mathcal{M}_n(K)$ è invertibile allora $\det(A) \neq 0$ e

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

dim: Se A è invertibile allora $\exists\, A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ tale che:

$$AA^{-1} = I_n \Longrightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

$\parallel \leftarrow$ teorema di Binet

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

Quindi $\det(A) \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

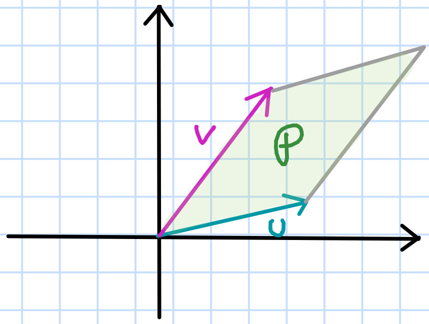
Interpretazione geometrica del determinante di una matrice 2×2 o 3×3.

Nel caso $n=2$ e $n=3$ il determinante ha un significato geometrico.

$n=2$ - Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Siano $u=(a,b)$, $v=(c,d) \in \mathbb{R}^2$. Sia P il parallelogramma di lati u e v. Allora è possibile mostrare che

$$\text{Area}(P) = |\det(A)|$$ valore assoluto



Più precisamente:

$\det(A) = \text{Area}(P)$, se per sovrapporre u a v percorrendo l'angolo $< 180°$ si deve ruotare u in senso antiorario.

$\det(A) = -\text{Area}(P)$, se per sovrapporre u a v si deve ruotare u in senso orario.

Da questa interpretazione geometrica è chiaro inoltre che

$\det(A) = 0 \iff \text{Area}(P) = 0 \iff P$ è un parallelogramma degenere $\iff u$ e v sono collineari (ossia linearmente dipendenti).

$n=3$ - Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Siano $u=(a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $v=(a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $w=(a_{31}, a_{32}, a_{33}) \in \mathbb{R}^3$. Sia P il parallelepipedo di lati u, v e w. Allora

$$|\det(A)| = \text{Volume}(P).$$

Anche in questo caso quindi abbiamo che $\det(A)=0$ se e solo se u, v e w sono linearmente dipendenti. (in tal caso infatti il parallelepipedo è un parallelogramma, che ha volume nullo).

Abbiamo quindi visto geometricamente per $n=2,3$ che n vettori di K^n sono linearmente indipendenti se e solo se $\det(A) \neq 0$, dove A è la matrice che ha per righe gli n vettori.

Più in generale abbiamo il risultato seguente:

Proposizione: Sia $A \in M_n(K)$.

I parte [Allora A è invertibile $\iff rg(A)=n \iff det(A) \neq 0$.

II parte [In tal caso $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} [(cof(A))]^T$.

Dim

Dimostriamo solo la prima parte dell'enunciato.

Abbiamo già visto che A è invertibile se e solo se $rg(A)=n$.
Mostriamo ora che A è invertibile se e solo se $det(A) \neq 0$.

$\Rightarrow$) Abbiamo già visto che questa implicazione è una conseguenza del teorema di Binet.

$\Leftarrow$) Mostriamo che se $det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ è invertibile o, equivalentemente, che se A non è invertibile $\Rightarrow det(A)=0$.

Se A non è invertibile $\Rightarrow rg(A) < n \Rightarrow$ le righe di A sono linearmente dipendenti. Per le proprietà del determinante si ottiene che $det(A)=0$.

Esempio

La II parte della proposizione rappresenta un metodo di calcolo dell'inversa di una matrice.

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Dalla regola di Sarrus otteniamo $det(A) = -3$.

Calcoliamo la matrice cofattore:

$cof(A)_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$cof(A)_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$cof(A)_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$cof(A)_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$

$cof(A)_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$cof(A)_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

$cof(A)_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$cof(A)_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$cof(A)_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Quindi $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left[\mathrm{cof}(A)\right]^T = -\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -6 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vediamo ora un ulteriore procedimento per il calcolo del rango di una matrice.
Partiamo dalla definizione seguente.

Def: Sia $M \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Un MINORE di M è il determinante di una sottomatrice quadrata. L'ordine del minore è l'ordine della sottomatrice quadrata corrispondente.

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. I minori:

$D_1 = a_{11}$, $D_2 = \det(A(12|12))$, ..., $D_i = \det(A(12\cdots i|12\cdots i))$, ..., $D_n = \det(A)$.

si dicono i MINORI PRINCIPALI di A.

Esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I minori principali sono:

$D_1 = 1$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

$D_3 = \det(A) = 0$

in un esempio precedente abbiamo visto che A non è invertibile

Vale il seguente teorema.

Teorema: Il rango di una matrice è uguale al massimo degli ordini dei minori non nulli.

In particolare, il teorema implica che se $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ha un minore non nullo di ordine p, allora $rg(A) \geq p$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango ≥ 2 poiché $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$.

Il teorema precedente non offre un metodo pratico per il calcolo del rango: infatti per mostrare che una matrice $A \in M_n(K)$ ha rango $p \leq n$, bisognerebbe mostrare che tutti i minori di ordine $p+1$ sono nulli.

Tuttavia, il teorema seguente afferma che è sufficiente mostrare che solo "certi" minori di ordine $p+1$ sono nulli, e quindi riduce il costo computazionale.

Principio dei minori orlati (Teorema di Kronecker)

Sia $A \in M_{m,n}(K)$. Sia M una sottomatrice quadrata di ordine p con $\det(M) \neq 0$.

Si definiscono orlati di M tutte le sottomatrici quadrate di ordine $p+1$ ottenute aggiungendo a M una riga e una colonna di A.

Se tutti gli orlati hanno determinante nullo, allora $rg(A) = p$!

Esempio

Supponiamo di voler calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R}).$$

Partiamo da un minore non nullo, ad esempio

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2.$$

Possiamo orlare la sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ soltanto in due modi diversi:

① $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

In ciascun caso otteniamo:

① $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 5 - 1 = 0$

② $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 3 = 0.$

Poiché tutti i minori orlati sono nulli otteniamo $rg(A) = 2$.

Concludiamo questa lezione con un'applicazione dei determinanti alla risoluzione dei sistemi lineari.
Il teorema di Cramer permette di risolvere sistemi lineari di n equazioni in n incognite quando esiste un'unica soluzione.

Teorema di Cramer

Consideriamo il sistema

notare che A deve essere quadrata

$$AX = b,$$

con $A \in M_n(K)$, $b \in M_{n,1}(K)$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Se A è invertibile ($\Leftrightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$), allora per il teorema di Rouché-Capelli il sistema possiede esattamente una soluzione $(x_1, \dots, x_n)$ data da:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad] \neq 0$$

dove A_i è la matrice ottenuta sostituendo la i-esima colonna di A con il vettore b.

Esempio

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

Vediamo innanzitutto se il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 + 3 = 4 \neq 0 \Rightarrow$$ il sistema ammette un'unica soluzione $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Utilizziamo il metodo di Cramer per determinare x_1, x_2 e x_3.

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b & & \\ \downarrow & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}}{4} = \frac{1+6-4+1}{4} = 1.$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{9-1-6+6}{4} = 2$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{6-1-9}{4} = \frac{-4}{4} = -1.$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è data da $(1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$.

Prima di passare al capitolo sulle applicazioni lineari, facciamo un sunto dei vari metodi visti fin qui per:

- calcolare il determinante di una matrice.
- calcolare il rango di una matrice.
- risolvere un sistema lineare.

- **Come calcolare il determinante di una matrice A?**

1) Se $A = (a) \in M_1(K) \Rightarrow \det(A) = a$.

2) Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K) \Rightarrow \det(A) = ad - bc$.

3) Se $A \in M_n(K)$ (in particolare $n \geq 3$):
   - teorema di Laplace (pratico quando esiste una riga o colonna con "tanti" zeri).
   - algoritmo di Gauss-Jordan
   - regola di Sarrus (per $n = 3$).

- **Come calcolare il rango di una matrice A?**

1) Se $A \in M_{m,n}(K)$:
   - Algoritmo di Gauss-Jordan (riduco a scalini e conto il numero di righe non nulle).
   - Principio dei minori orlati

2) Se $A \in M_n(K)$ e $\det(A) \neq 0 \rightarrow rg(A) = n$.

- **Come risolvere un sistema lineare $AX = b$?**

<u>Compatibilità</u>:
- algoritmo di Gauss-Jordan (guardo la posizione dell'ultimo pivot)
- teorema di Rouchè-Capelli (compatibile $\Leftrightarrow rg(A) = rg(A|b)$)

<u>Risoluzioni</u> (se compatibile):
- dopo Gauss-Jordan individuo le variabili libere e "risalgo" il sistema a scalini.
- se $A \in M_n(K)$ e $\det(A) \neq 0$: metodo di Cramer.